



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL: MECÁNICA

Departamento de Ingeniería Mecánica

Proyecto Fin de Carrera

FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES PARA FISURAS SEMIELÍPTICAS EN EJES CILÍNDRICOS BAJO FLEXIÓN ROTATIVA

Autor: Mikel Buesa Martín

Directora del Proyecto: Patricia Rubio Herrero



AGRADECIMIENTOS

El presente proyecto supone inevitablemente un punto de inflexión en mi vida. Se trata de la culminación de la carrera que siempre he deseado estudiar, *Ingeniería Técnica Industrial*. Escogí la especialidad de *Mecánica* porque siempre ha sido mi pasión y, aunque durante estos años he encontrado diversas dificultades para realizarla, lo cierto es que la experiencia ha sido muy gratificante en todos los aspectos y nunca me ha faltado motivación para continuar. Además no solo me he formado académicamente sino que he crecido como persona. Gran parte del mérito de esto lo tienen las personas que me han acompañado durante esta etapa de mi vida. Es por ello por lo que quiero agradecerélos a todos los responsables:

En primer lugar querría agradecerélos a mi profesora *M^a Belén Muñoz Abella* por brindarme la posibilidad de realizar este proyecto y por presentarme a la tutora del mismo, *Patricia Rubio Herrero*, que me ha ayudado en todos y cada uno de los aspectos de este estudio mostrándome una atención casi infinita y dejándome un espacio en su despacho para poder trabajar. Además considero que todo lo que he aprendido del programa ABAQUS me lo ha enseñado ella y tiene un valor incalculable para mi futuro como ingeniero.

Quiero agradecerles a mis madre *M^a Carmen* y a mi padre *Mikel* todo el apoyo que me dan día tras día. Siempre han mostrado interés en hacer que logre los objetivos que yo mismo me marco y me han ayudado y aconsejado en todo lo que han podido. También agradecer a mi padre su ayuda para perfilar con tinte académico la redacción del proyecto. Además saber que se sienten orgullosos de mí es una de las mayores motivaciones que tengo. Sin ellos nada de esto sería posible.

Gracias a mis hermanos mayores Jaime y Juan, que ambos han sido una inspiración directa en todas las facetas de mi vida.

También se lo quiero agradecer a todos mis amigos de la infancia y los compañeros de la universidad, en especial al que es ambas cosas, *Gabriel*, que sin su compañía durante los trayectos en coche a la universidad, sin la información que me daba referente a apuntes, prácticas, exámenes y demás procedimientos académicos, posiblemente no estaría escribiendo estas líneas. Gracias, pronto tú también acabarás.

Finalmente se lo quiero agradecer a mi novia *Mónica* que durante los dos últimos años ha sido un apoyo muy grande para mí en los buenos momentos y en los malos. Siempre ha tenido en cuenta mis ilusiones y me ha motivado más que suficiente para que llegue a cumplirlas. Muchísimas gracias.

Se lo dedico a Gorbi.





ÍDICE

<i>Capítulo 1</i>	<i>Página</i>
INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS	11
1.1. INTRODUCCIÓN	11
1.2. OBJETIVOS.....	12
1.3. ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO	13
 <i>Capítulo 2</i>	
ESTUDIO TEÓRICO DEL CÁLCULO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES EN UN EJE FISURADO.....	15
2.1. INTRODUCCIÓN.....	15
2.2. MECÁNICA DE LA FRACTURA.....	19
2.2.1. Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL).....	19
2.2.2. Tensiones y desplazamientos en el frente de fisura.....	21
2.2.3. Deformación en el frente de fisura	24
2.2.4. Tenacidad de fractura	25
2.3. APERTURA Y CIERRE DE LA FISURA	25
 <i>Capítulo 3</i>	
MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.....	29
3.1. INTRODUCCIÓN	29
3.2. CONCEPTOS BÁSICOS DEL MÉTODO	30
3.3. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS CON “ABAQUS 6.7”	32
 <i>Capítulo 4</i>	
MODELO NUMÉRICO	35
4.1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	35
4.2. REALIZACIÓN DE LA SIMULACION CON “ABAQUS 6.7”	36
 <i>Capítulo 5</i>	
RESULTADOS Y DISCUSIÓN	45
5.1. FENÓMENO DE APERTURA Y CIERRE DE LA FISURA	45
5.2. PROPAGACIÓN DE LA FISURA EN FUNCIÓN DEL FIT	87
5.3. CONCLUSIONES	91
5.4. TRABAJOS FUTUROS	92
 BIBLIOGRAFÍA	93



ÍNDICE DE FIGURAS

- Figura 2.1. Sección transversal del eje y geometría de la fisura.
- Figura 2.2. Fisuras con factor de forma $\beta=0.25$, $\beta=0.50$, $\beta=0.75$ y $\beta=1.00$.
- Figura 2.3. Posiciones angulares del eje.
- Figura 2.4. Modos de fractura mecánica.
- Figura 2.5. Sistema de coordenadas y tensor de tensiones en el extremo de la fisura.
- Figura 2.6. Distribución de la componente de la tensión σ_y en la región del frente de fisura.
- Figura 2.7. Esfuerzos de tracción en la fisura con el eje sometido a flexión.
- Figura 2.8. Mecanismo “breathing” de la fisura (Modelo de Darpe).
- Figura 4.1. Eje fisurado biapoyado sometido a cargas.
- Figura 4.2. Particiones longitudinales del eje.
- Figura 4.3. Particiones transversales del eje.
- Figura 4.4. Ensamblado de las dos mitades del eje.
- Figura 4.5. Interacciones y restricciones para las diferentes profundidades de fisura.
- Figura 4.6. Eje biapoyado sometido a carga.
- Figura 4.7. Mallados longitudinales para los factores de forma $\beta=0.25$ y $\beta=0.50$.
- Figura 4.8. Mallados longitudinales para los factores de forma $\beta=0.75$ y $\beta=1.00$.
- Figura 4.9. Mallado transversal con detalle de refinado próximo a la fisura.
- Figura 5.1. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.1$ para las ocho posiciones angulares.
- Figura 5.2. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.1$ a lo largo de un giro completo.
- Figura 5.3. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.2$ para las ocho posiciones angulares.
- Figura 5.4. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.2$ a lo largo de un giro completo.
- Figura 5.5. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.3$ para las ocho posiciones angulares.
- Figura 5.6. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.3$ a lo largo de un giro completo.
- Figura 5.7. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.4$ para las ocho posiciones angulares.
- Figura 5.8. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.4$ a lo largo de un giro completo.
- Figura 5.9. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.5$ para las ocho posiciones angulares.

- Figura 5.10. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.5$ a lo largo de un giro completo.
- Figura 5.11. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.1$ para las ocho posiciones angulares.
- Figura 5.12. Comparación del FIT de $\beta=0.25$ y $\beta=0.50$ para $\alpha=0.1$ en el proceso de apertura.
- Figura 5.13. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.1$ a lo largo de un giro completo.
- Figura 5.14. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.2$ para las ocho posiciones angulares.
- Figura 5.15. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.2$ a lo largo de un giro completo.
- Figura 5.16. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.3$ para las ocho posiciones angulares.
- Figura 5.17. Comparación del FIT de $\beta=0.25$ y $\beta=0.50$ para $\alpha=0.3$ en el proceso de apertura.
- Figura 5.18. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.3$ a lo largo de un giro completo.
- Figura 5.19. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.4$ para las ocho posiciones angulares.
- Figura 5.20. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.4$ a lo largo de un giro completo.
- Figura 5.21. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.5$ para las ocho posiciones angulares.
- Figura 5.22. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.5$ a lo largo de un giro completo.
- Figura 5.23. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.1$ para las ocho posiciones angulares.
- Figura 5.24. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.1$ a lo largo de un giro completo.
- Figura 5.25. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.2$ para las ocho posiciones angulares.
- Figura 5.26. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.2$ a lo largo de un giro completo.
- Figura 5.27. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.3$ para las ocho posiciones angulares.
- Figura 5.28. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.3$ a lo largo de un giro completo.
- Figura 5.29. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.4$ para las ocho posiciones angulares.
- Figura 5.30. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.4$ a lo largo de un giro completo.
- Figura 5.31. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.5$ para las ocho posiciones angulares.
- Figura 5.32. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.5$ a lo largo de un giro completo.
- Figura 5.33. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.1$ para las ocho posiciones angulares.
- Figura 5.34. Comparación del FIT de $\beta=0.25$, $\beta=0.5$, $\beta=0.75$ y $\beta=1$ para $\alpha=0.1$ en el proceso de apertura.
- Figura 5.35. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.1$ a lo largo de un giro completo.

Figura 5.36. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.2$ para las ocho posiciones angulares.

Figura 5.37. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.2$ a lo largo de un giro completo.

Figura 5.38. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.3$ para las ocho posiciones angulares.

Figura 5.39. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.3$ a lo largo de un giro completo.

Figura 5.40. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.4$ para las ocho posiciones angulares.

Figura 5.41. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.4$ a lo largo de un giro completo.

Figura 5.42. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.5$ para las ocho posiciones angulares.

Figura 5.43. Comparación del FIT de $\beta=0.25$, $\beta=0.5$, $\beta=0.75$ y $\beta=1$ para $\alpha=0.5$ en el proceso de apertura.

Figura 5.44. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.5$ a lo largo de un giro completo.

Figura 5.45. FIT para $\beta=0.25$ y $\theta=180^\circ$ para las cinco profundidades α .

Figura 5.46. FIT para $\beta=0.50$ y $\theta=180^\circ$ para las cinco profundidades α .

Figura 5.47. FIT para $\beta=0.75$ y $\theta=180^\circ$ para las cinco profundidades α .

Figura 5.48. FIT para $\beta=1.00$ y $\theta=180^\circ$ para las cinco profundidades α .



CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1. INTRODUCCIÓN

En el ámbito de las máquinas y mecanismos es muy común encontrarse con componentes mecánicos que presentan diferentes tipos de defectos. Estos pueden ser ocasionados por las condiciones en las que trabaja el elemento mecánico y los esfuerzos a los que está sometido. La aparición de fisuras puede modificar las propiedades mecánicas de la pieza disminuyendo su rigidez y acortando su tiempo en servicio.

Por este motivo, numerosos estudios se centran en el desarrollo de detección e identificación de fisuras en elementos mecánicos, cuyo objetivo es determinar si la magnitud de las fisuras supera los máximos admisibles que comprometerían la integridad física del componente.

En el caso de las máquinas rotativas, uno de los elementos más importantes que las constituyen son los ejes. La aparición de fisuras en estos elementos da lugar a averías considerables en las máquinas. Estas fisuras se propagan sobre un plano perpendicular a la dirección del eje giratorio, como consecuencia de la fatiga provocada por los esfuerzos de flexión y de torsión a los que está sometido. La sollicitación cíclica se debe al giro del eje ya que, siendo el estado de cargas constante, el estado tensional de la sección transversal de la fisura varía con la posición angular del eje.

La presencia de fisuras en un eje rotativo aumenta la flexibilidad del mismo, afectando a su comportamiento estático y dinámico, que se traducen en un aumento de los desplazamientos transversales, disminución de las frecuencias de vibración, etc.

La propagación de estas fisuras está relacionada con el Factor de Intensidad de Tensiones (FIT). En este estudio se calculará el FIT mediante el método de elementos finitos, a lo largo de una fisura de frente semielíptico, ya que es la geometría que se aproxima más a las fisuras reales. Asimismo se estudiarán fisuras en diferentes posiciones angulares, manteniendo las cargas fijas para simular un eje rotativo en servicio. Esto es importante ya que, debido a la flexión del eje, se podrá ver que a lo largo de un giro completo, la fisura se abrirá y cerrará según la posición angular del eje dependiendo de si se encuentra sometida a esfuerzos de tracción o compresión.

1.2. OBJETIVOS

El objetivo de este proyecto es obtener el FIT con el programa de elementos finitos ABAQUS, a lo largo del frente de fisura del eje, en función de la posición angular del eje, la profundidad relativa de la fisura y el factor de forma de la misma. De igual manera, se determinará el grado de apertura de la fisura durante un giro completo del eje. Mediante el cálculo del FIT en diversas geometrías se pretende estimar como variará la forma de la fisura además de, obviamente, crecer en profundidad.

1.3. ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO

Este estudio se divide en cinco capítulos. El primero se dedica a la introducción y objetivos. En el segundo capítulo se explica el problema planteado y la teoría referente al caso. En el tercer capítulo se describe brevemente el método de elementos finitos y el funcionamiento del programa ABAQUS con el que se realiza la simulación del problema. En el cuarto capítulo se explica cómo se realiza el estudio numérico del FIT en el frente de la fisura en función de diversos parámetros con el programa ABAQUS. En el quinto capítulo se exponen los resultados obtenidos de la simulación y se comentan para finalizar con las principales conclusiones y se exponen las posibles líneas de trabajo futuro. Finalmente se incluyen las referencias bibliográficas utilizadas en este estudio.



CAPÍTULO 2

ESTUDIO TEÓRICO DEL CÁLCULO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES EN UN EJE FISURADO

2.1. INTRODUCCIÓN

Uno de los tipos de fallo más importantes que habitualmente sufren los ejes rotativos está relacionado con la aparición y propagación de fisuras de fatiga debidas a las tensiones combinadas de torsión y flexión fluctuantes a las que se ven sometidas. Debido a que las cargas provocan la flexión del eje, en el punto más bajo aparecen sollicitaciones de tracción normales que favorecen la apertura y propagación de la fisura.

En la mayoría de trabajos que estudian el comportamiento de ejes fisurados, se supone que la fisura presenta un frente recto, sin embargo las fisuras de fatiga que aparecen en los ejes rotativos suelen presentar un frente semielíptico.

A continuación se muestra la sección transversal del eje en su parte central donde se define la geometría de la fisura elíptica (Fig. 2.1), siendo D el diámetro del eje, a y b los semiejes menor y mayor de la elipse, w la distancia entre el centro del eje y un punto cualquiera del frente de la fisura y h la distancia del centro del eje al punto del frente de fisura situado en el contorno exterior del eje.

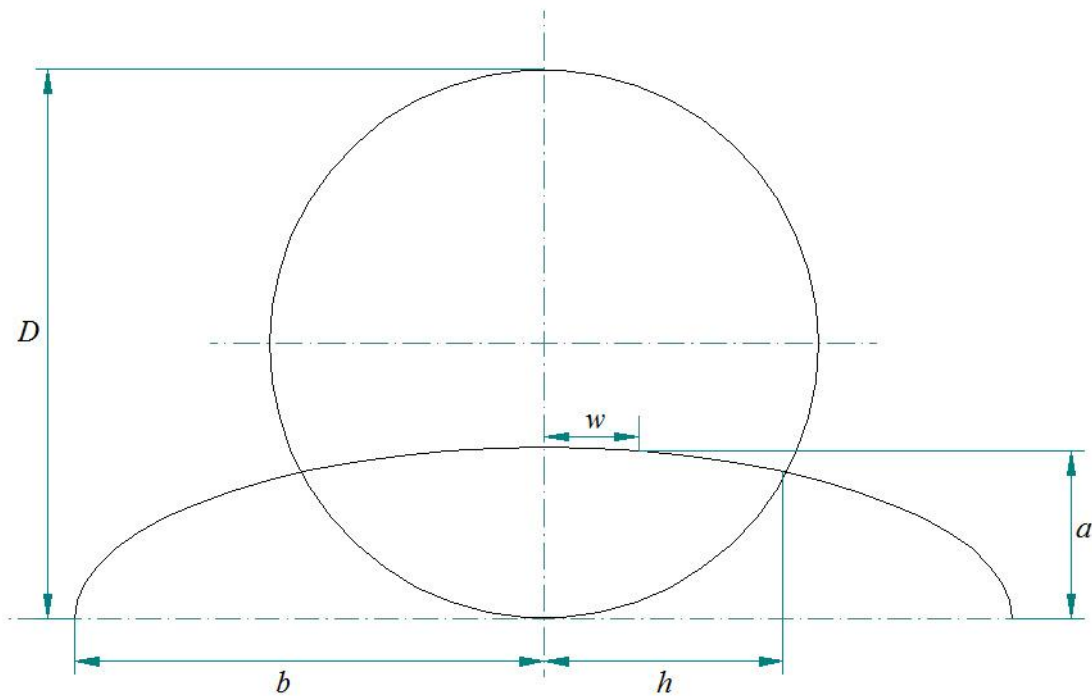


Fig. 2.1. Sección transversal del eje y geometría de la fisura.

Las fisuras con geometrías elípticas quedan definidas por las siguientes variables:

- Longitud característica de la fisura α .

$$\alpha = \frac{a}{D} \quad [2.1]$$

Determina la profundidad de la fisura.

- Factor de forma de la fisura β .

$$\beta = \frac{a}{b} \quad [2.2]$$

Los valores de β están comprendidos entre cero y uno. Cuando $\beta=0$ las fisuras son de frente recto y para $\beta=1$ las fisuras son de frente semicircular.

- Posición relativa en el frente de fisura γ .

$$\gamma = \frac{w}{h} \quad [2.3]$$

Este estudio se centrará en las geometrías de fisuras cuyos factores de forma serán $\beta=0.25$, $\beta=0.50$, $\beta=0.75$ y $\beta=1.00$ respectivamente (Fig. 2.2):

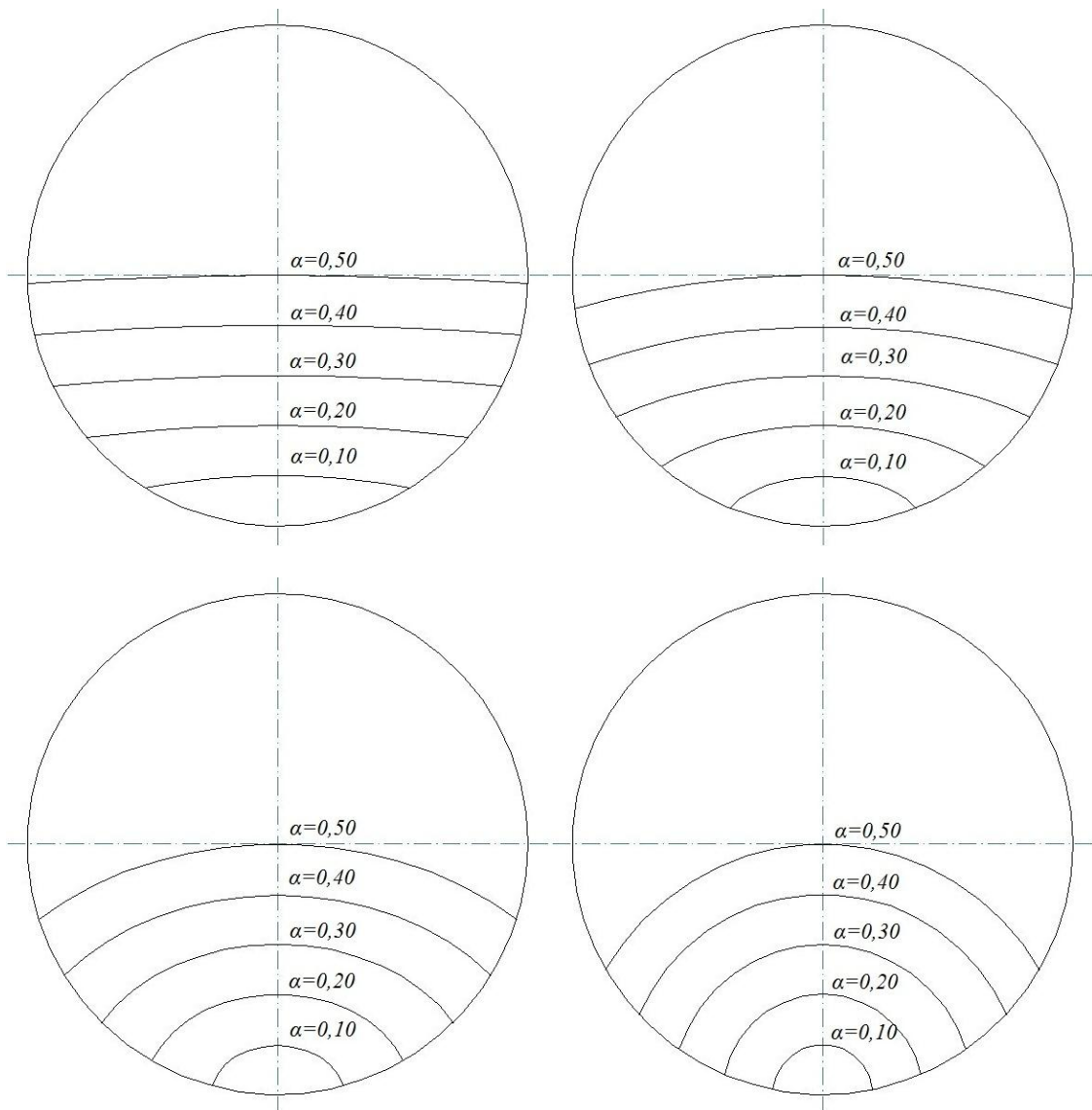


Fig. 2.2. Fisuras con factor de forma $\beta=0.25$, $\beta=0.50$, $\beta=0.75$ y $\beta=1.00$.

En cuanto a la longitud característica de la fisura, α , se estudian las cinco que se muestran en la figura anterior (Fig. 2.2), $\alpha=0.10$, $\alpha=0.20$, $\alpha=0.30$, $\alpha=0.40$ y $\alpha=0.50$.

Para todas las geometrías de fisura descritas anteriormente, se calcula el factor de intensidad de tensiones (FIT) a lo largo del frente de la fisura, para un giro completo del eje. Para ello se toman las ocho posiciones angulares θ del eje que aparecen en la figura (Fig. 2.4).

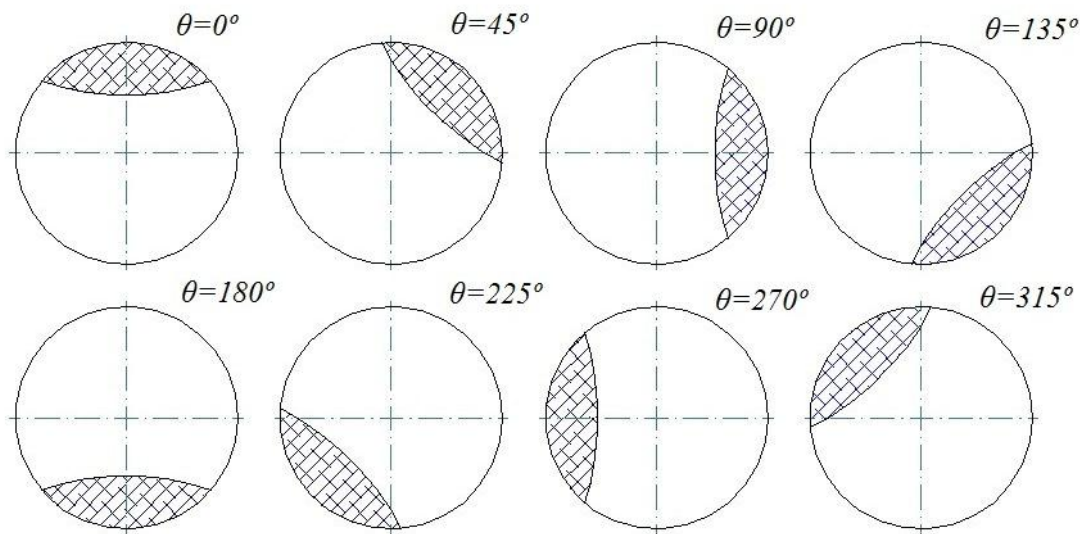


Fig. 2.3. Posiciones angulares del eje.

En total, con cuatro factores de forma β y cinco longitudes características α , son 20 fisuras diferentes, y con ocho posiciones angulares del eje, son 160 casos los que se simularán con el programa de cálculo por elementos finitos ABAQUS. Debido a que en un modelo dinámico ABAQUS no permite el cálculo del factor de intensidad de tensiones, se generaran unos modelos estáticos en los cuales no giramos el eje, sino el sistema de cargas y apoyos, simulando un supuesto equivalente al funcionamiento real de un eje fisurado.

2.2. MECÁNICA DE LA FRACTURA

La teoría de la elasticidad tiene como propósito ilustrar procedimientos analíticos con el fin de desarrollar ecuaciones constitutivas para predecir el fallo de sólidos sin imperfecciones. Sin embargo cuando los sólidos tienen defectos o fisuras, las ecuaciones de la teoría de la elasticidad no tienen en cuenta el fenómeno de concentración de tensiones en los extremos de una grieta. Por ello es necesario utilizar los principios de la Mecánica de la Fractura.

La Mecánica de la Fractura [Martín, Martínez, 1999] es una materia que data de principios del siglo XX. A. A. Griffith [1920] es considerado el padre de esta disciplina, en concreto de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL), que se trata de predecir la rotura de materiales frágiles con apenas plasticidad.

2.2.1 MECÁNICA DE LA FRACTURA ELÁSTICA LINEAL (MFEL):

La Mecánica de la Fractura Elástica Lineal [Barsom, Rolfe, 1987] se basa en un procedimiento analítico que relaciona la magnitud y distribución del campo de tensiones en las proximidades del vértice de la grieta con la tensión nominal aplicada al miembro estructural, con el tamaño, forma y orientación de la grieta o fisura, y las propiedades del material.

Se establece que todas las alteraciones producidas por la rotura están concentradas en una zona próxima al frente de la grieta o fisura, comportándose el resto del sólido de manera elástica lineal. Dichas alteraciones están caracterizadas por el parámetro K , conocido como Factor de Intensidad de Tensiones (FIT). Este parámetro, K , está relacionado tanto con el nivel de tensión nominal (σ) en el miembro y el tamaño de la presente fisura (a). Así, todos los elementos estructurales que tienen defectos se pueden clasificar según los distintos niveles de K , de forma análoga a la situación en la que elementos sin fallos estructurales o mecánicos se pueden clasificar según los niveles de tensión diferentes, σ .

El fallo de la mayoría de los componentes estructurales o mecánicos es causado por la propagación de fisuras. La magnitud y la distribución del campo de esfuerzos en las proximidades del frente de la fisura es esencial para determinar la seguridad y la fiabilidad de las estructuras. Una evaluación cuantitativa de la seguridad y fiabilidad de

las estructuras es posible, debido a que la mecánica de la fractura se basa en el análisis tensional del componente sometido a estudio.

Para establecer los métodos de análisis de esfuerzos en busca de grietas en sólidos elásticos, es conveniente definir tres tipos de movimientos relativos de las dos superficies de la fisura, [Paris, Sih, 1965] que representan la deformación local de un elemento infinitesimal que contiene el frente de la fisura. Esto conduce a la definición de los llamados Modos de fractura, según el movimiento relativo de los labios de la fisura (Fig. 2.5):

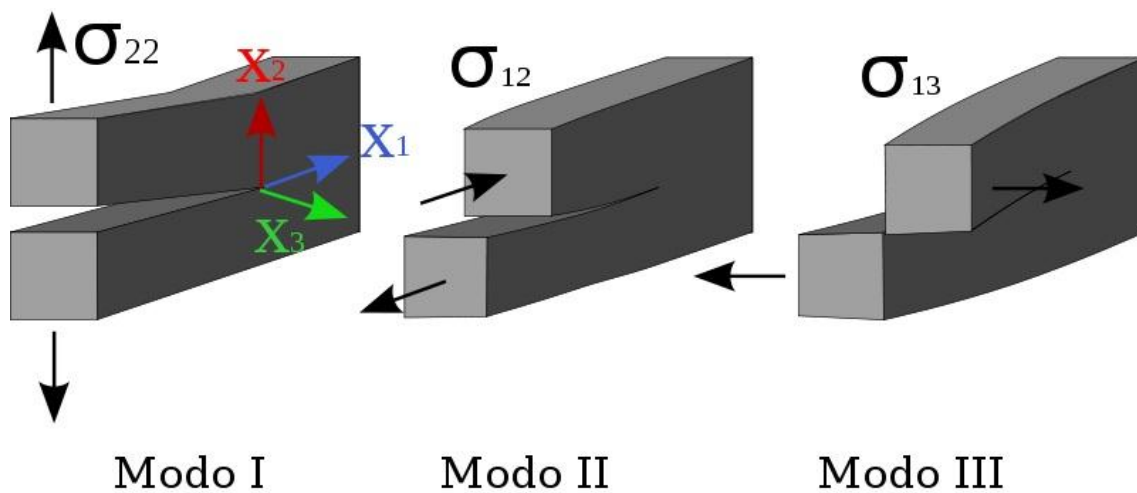


Fig. 2.4. Modos de fractura mecánica.

- **Modo I:** Modo de apertura, en el que los esfuerzos tensionales son perpendiculares a la fisura.
- **Modo II:** Modo de cizallamiento, donde los esfuerzos son paralelos a las caras de la fisura y perpendiculares al frente de fisura, pero con sentidos opuestos.
- **Modo III:** Modo de rasgado, en el cual los esfuerzos son paralelos a las caras y al frente de la fisura, pero con sentidos opuestos.

En el modo de apertura, Modo I, las dos superficies de fractura son desplazadas perpendicularmente entre sí en direcciones opuestas. Cada uno de estos modos de deformación corresponde a un tipo básico de campo de esfuerzos en las proximidades de los frentes de la fisura. En cualquier problema, las deformaciones en el frente de

fisura pueden ser tratadas como uno, o una combinación de estos modos de desplazamientos locales. Además, el campo de esfuerzos en dicho frente puede ser tratado como uno, o una combinación de los tres tipos básicos de campos de tensiones. La mayoría de fallos en componentes mecánicos se deben a desplazamientos correspondientes al Modo I, por lo tanto, es el modo que se hace hincapié en este estudio, ya que como se ha explicado anteriormente, la flexión del eje provoca unas sollicitaciones que se corresponderían con el Modo I de fractura.

Los parámetros K_I , K_{II} y K_{III} [Irwin, 1957] son los Factores de Intensidad de Tensiones en los Modos I, II y III, respectivamente, y caracterizan completamente los campos de tensiones y desplazamientos en las proximidades del frente de fisura. Dichos FIT en los tres modos, en general, dependerán de las sollicitaciones impuestas, la geometría del sólido y el tamaño de la grieta.

2.2.2. Tensiones y desplazamientos en el frente de fisura:

Basándose en los estudios desarrollados por Westergaard [1939], Irwin [1957] encontró que los campos de esfuerzos y desplazamientos en la zona del frente de una fisura que se propaga según el Modo I de deformación, en función del factor de intensidad de tensiones en dicho modo, K_I , están dados por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad [2.4]$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad [2.5]$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad [2.6]$$

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - 2\nu + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 - 2\nu - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \end{pmatrix} \quad [2.7]$$

$$u_z = 0 \quad [2.8]$$

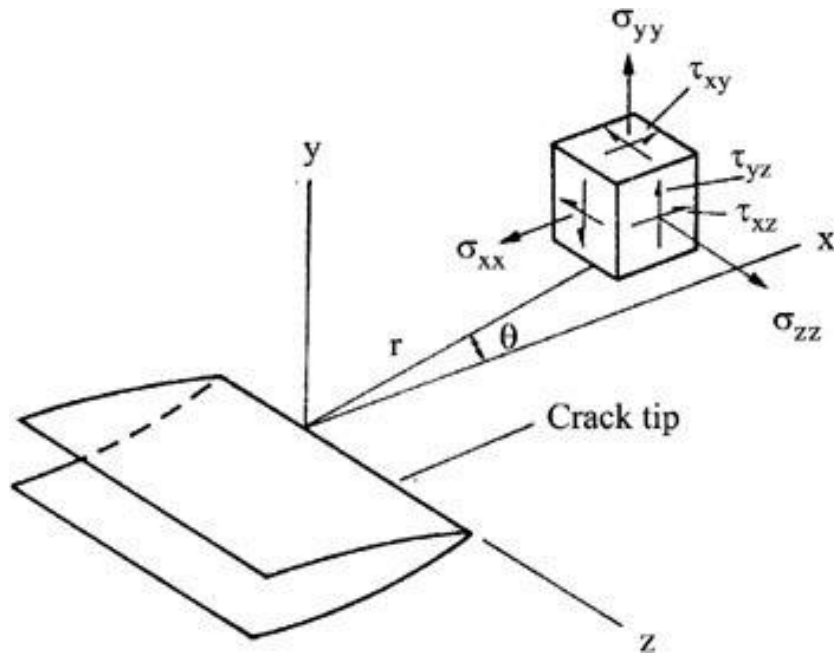


Fig. 2.5. Sistema de coordenadas y tensor de tensiones en el extremo de la fisura.

Siendo (Fig. 2.6) σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , τ_{xy} , τ_{xz} y τ_{yz} las componentes del tensor de tensiones; u_x , u_y y u_z son los desplazamientos en las direcciones x , y y z ; r y θ las coordenadas polares; K_I es el FIT en el Modo I; ν es el coeficiente de Poisson, G el módulo de elasticidad transversal. Nótese que estas ecuaciones representan el caso de deformación plana, ya que al tratarse del Modo I de fractura, $u_z=0$.

Estas ecuaciones de campo muestran que la distribución de las tensiones elásticas y de deformación en las proximidades del frente de fisura son invariantes en todos los elementos mecánicos sometidos a un determinado modo de deformación. Por tanto la magnitud del campo de tensiones elásticas puede ser descrita por un solo término, el factor de intensidad de tensiones correspondiente al Modo I, II o III, según cual sea el caso. En consecuencia, la tensión aplicada, la forma y el tamaño de la fisura, y la configuración estructural, asociada con los componentes estructurales sometidos a un determinado modo de deformación afectará al valor del factor de intensidad de tensiones pero no a la distribución del campo de tensiones. El análisis dimensional de las ecuaciones indica que el factor de intensidad de tensiones debe ser linealmente proporcional con la tensión y debe estar directamente relacionada con la raíz cuadrada de una longitud característica. Basándose en el análisis original de Griffith de los componentes de vidrio fisurados, esta longitud característica sería la longitud de la fisura. En consecuencia, la magnitud del factor de intensidad de tensiones debe estar directamente relacionada con la magnitud de la tensión nominal aplicada, σ , y la raíz

cuadrada de la longitud de la fisura, a . De tal manera que la expresión del factor de intensidad de tensiones para cualquier caso tiene la forma:

$$K = \sigma \cdot \sqrt{a} \cdot f(g) \quad [2.9]$$

Donde $f(g)$ es un parámetro geométrico adimensional, objeto de numerosas investigaciones [Paris, Sih, 1965; Tada, Paris, Irwin, 1973; Sih, 1973], que depende de la forma concreta del elemento de estudio y la geometría de la fisura que contiene.

Según Barsom y Rolfe [1987] uno de los aspectos más importantes del factor de intensidad de tensiones, K_I , es que relaciona el campo de esfuerzos local sobre la fisura de un elemento estructural, con la tensión nominal aplicada a ese mismo componente estructural, libre de fisuras. En concreto, en la figura 2.6 se muestran las tensiones en una fisura. La mayoría de las fracturas frágiles se producen en condiciones de Modo I de carga. En consecuencia, la tensión de interés primario en la figura 2.6 y en la mayoría de las aplicaciones prácticas es σ_{yy} . Para que σ_{yy} sea máxima, en la ecuación 2.4, se tiene que $\theta = 0$, y por lo tanto:

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad [2.10]$$

Reordenando esta expresión resulta:

$$K_I = \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r} \quad [2.11]$$

Según aumenta r (alejamiento del frente de fisura) se observa que la tensión σ_{yy} disminuye, manteniéndose el factor de intensidad de tensiones K_I constante. De esta manera, K_I describe el campo de esfuerzos alrededor de una fisura.

Por lo tanto, el K_I describe la intensidad del campo de tensiones en una fisura en cualquier elemento estructural (placas, vigas, alas de aviones, etc.), siempre y cuando el parámetro geométrico apropiado, $f(g)$, se pueda determinar. Nótese que las unidades de K_I son $[\text{Pa} \cdot (\text{m})^{1/2}]$, unidades de tensión multiplicadas por la raíz cuadrada de la distancia.

2.2.3. Deformación en el frente de fisura:

Las ecuaciones del campo de tensiones y desplazamientos [2.4-2.8] muestran que la tensión elástica en la proximidad del frente de la fisura, es decir, cuando $r \ll a$, puede ser muy grande. En realidad, dichas magnitudes de gran tensión no se producen porque el material en esta región se somete a una deformación plástica, creando así una zona plástica que rodea el frente de fisura. En la Fig. 2.7 [Barsom, Rolfe, 1987] se muestra una representación esquemática del cambio en la distribución de la componente y de la tensión causada por la deformación plástica localizada en la proximidad de la punta de la grieta:

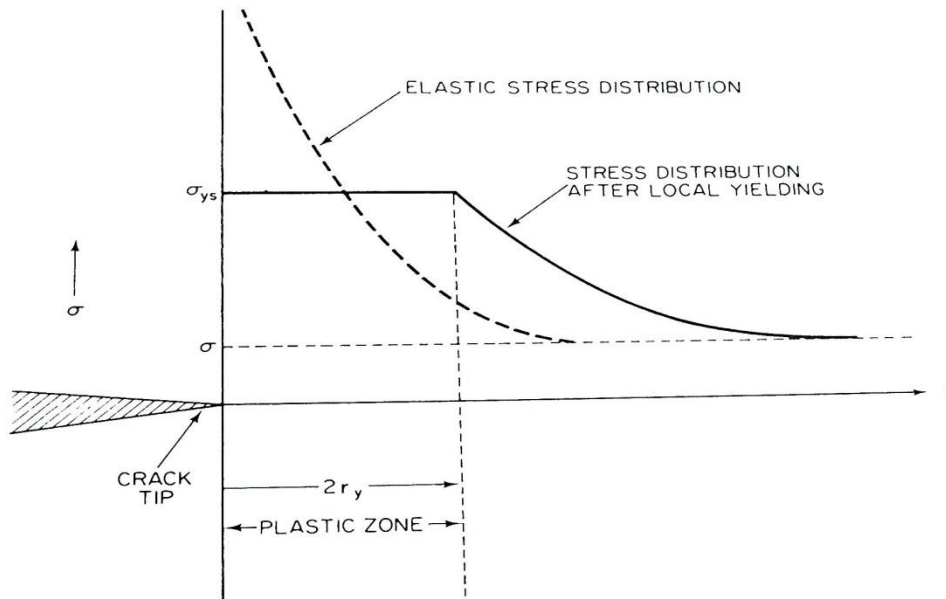


Fig. 2.6. Distribución de la componente de la tensión σ_y en la región del frente de fisura.

El tamaño de la zona plástica, r_y , puede estimarse a partir de las ecuaciones del campo de tensiones tratando el problema en uno de los planos de tensión y estableciendo la componente y de la tensión, σ_y , igual a su límite elástico, σ_{ys} , lo que resulta [Irwin, 1960]:

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad [2.12]$$

Irwin [1968] sugirió que el tamaño de la zona plástica bajo condiciones de deformación plana puede ser obtenida considerando el aumento de la tensión de tracción por la plastificación causada. En estas condiciones, el límite elástico se calcula que aumentará en un factor de $\sqrt{3}$. De tal manera que el tamaño de zona plástica se reduce:

$$r_y = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad [2.13]$$

Esta corrección del factor de la zona plástica, r_y , solamente es válida para pequeñas regiones plásticas.

2.2.4. Tenacidad de fractura:

Uno de los principios fundamentales de la mecánica de la fractura es que la fractura inestable ocurre cuando el factor de intensidad de tensiones en el frente de la fisura, K , alcanza un valor crítico. Para el Modo I de deformación y para pequeñas fisuras con deformación plástica (en condiciones de deformación plana), el factor de intensidad de tensiones crítico para la inestabilidad de la fractura se denomina K_{Ic} . Determina la capacidad de un material para soportar un campo de tensiones en el frente de fisura y para resistir la extensión progresiva de la misma por la tracción. Así, K_{Ic} representa la Tenacidad a la Fractura de un material, mientras que el K_I representa la intensidad de la tensión de una fisura en cualquier material.

En general, el K_I debe mantenerse por debajo del K_{Ic} en todo momento, para evitar la fractura en los componentes con defectos de la misma manera en que, en los elementos sin fisuras se mantiene la tensión nominal, σ , por debajo de σ_{ys} .

De modo que, el criterio local de fractura en el Modo I es el siguiente:

$$K_I \geq K_{Ic} \quad [2.14]$$

2.3. APERTURA Y CIERRE DE LA FISURA

Un aspecto a tener en cuenta en la dinámica de ejes fisurados es el estado de la fisura durante el giro del eje. Aunque el eje se encuentre sometido a esfuerzos fijos y

constantes, la sección fisurada variará su estado tensional según su posición angular relativa.

Las fisuras transversales en ejes se abren o se cierran en función de si se encuentran sometidos a esfuerzos de tracción o compresión. Estos esfuerzos en los labios de una fisura, dependen a su vez, de la posición relativa de la sección fisurada con respecto a las cargas a las que el eje está sometido. Cuando un eje apoyado en sus extremos se somete a flexión como se aprecia en la figura 2.8, se observa que los esfuerzos en la superficie inferior del eje son de tracción, así como en la superficie superior son de compresión.

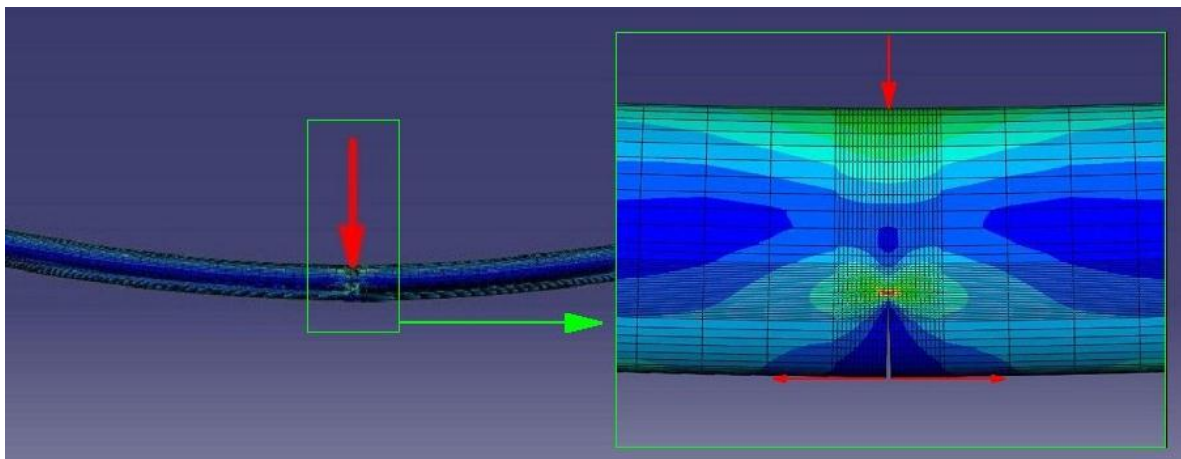


Fig. 2.7. Esfuerzos de tracción en la fisura con el eje sometido a flexión.

En la figura 2.8 se muestra la fisura en la parte inferior del eje, por lo tanto, al estar sometida a tracción se encuentra en estado abierto. Si se girase el eje 180° , la fisura estaría situada en la parte superior del eje, de forma que los esfuerzos en los labios de la fisura serían de compresión y por tanto, se encontraría en estado cerrado. Se deduce fácilmente que para un giro completo se produce un ciclo de apertura y cierre de la fisura. A este fenómeno se le conoce como “breathing” o “respiración de la fisura”. Este estudio pretende determinar, a través de factor de intensidad de tensiones (FIT) en el frente de fisura, cómo la fisura se abre y cierra de forma gradual en función de la posición angular del eje.

A.K. Darpe, K. Gupta y A. Chawla [2004] estudiaron la variación de la flexibilidad de ejes con fisuras de frente horizontal determinando cuánto se abre la fisura a lo largo de un giro. En la figura 2.9 se muestra un esquema del modelo de

apertura y cierre de Darpe en ocho posiciones angulares a lo largo de un giro completo, y las cargas a las que se encuentra sometido (su propio peso, P).

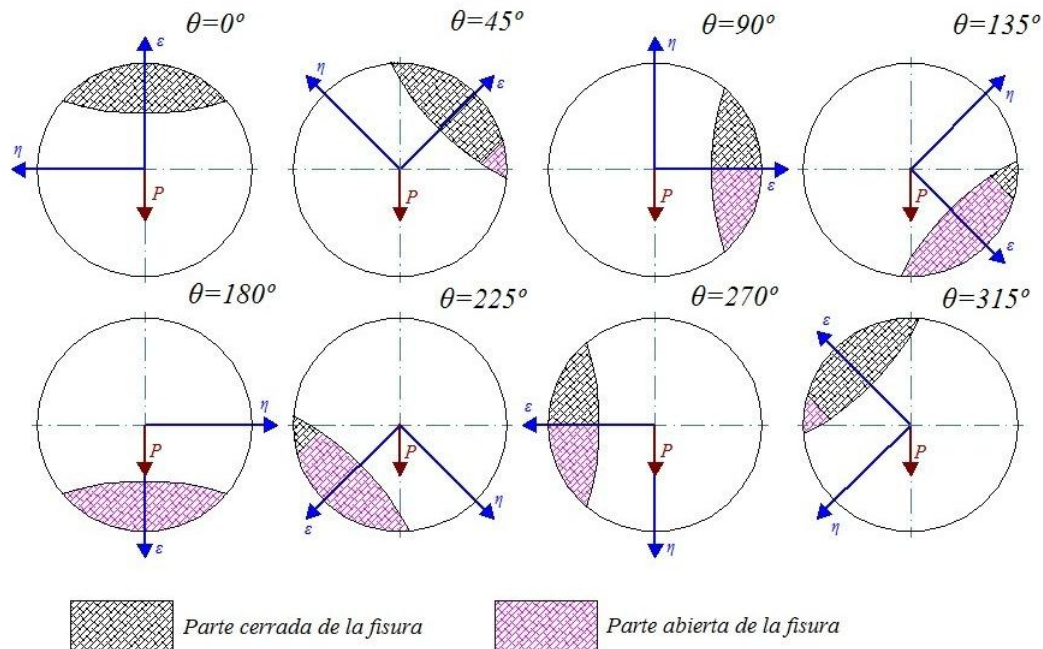


Fig. 2.8. Mecanismo “breathing” de la fisura (Modelo de Darpe).

Donde ε y η son las coordenadas del sistema de referencia giratorio fijado al eje.

La figura 2.9 es una representación orientativa del proceso de “breathing” de la fisura según el modelo de Darpe, que sirve para ver cómo se va abriendo y cerrando una fisura elíptica. Se podrá comprobar que a lo largo del giro, la fisura se abre y cierra alternativamente y no tiene por qué coincidir que la fisura esté medio abierta para ángulos de 90° y de 270° . Incluso se verá que para posiciones angulares de 45° y 315° la fisura aun estará cerrada.

El concepto de “crack closure line” (CCL) o “línea de cierre de la fisura” (LCF) se refiere a una línea perpendicular al frente de fisura que separa la zona cerrada (negro) y la abierta (magenta). La fisura se encontrará completamente abierta para un ángulo $\theta=180^\circ$, y completamente cerrada para un ángulo $\theta=0^\circ$. Como se puede ver en la figura 2.9 la “línea de cierre de la fisura” se irá desplazando sobre el frente de fisura a lo largo del giro. En la posición angular de $\theta=0^\circ$ la LCF se encuentra en uno de los extremos del frente dejando la fisura cerrada. Según el eje va girando, la LCF se desplaza

gradualmente hasta llegar al otro extremo ($\theta=180^\circ$) dejando la fisura completamente abierta. Este proceso se repetirá a la inversa al completar el giro.

Se sabe que el FIT en un punto del frente de fisura toma valores positivos si en dicho punto la fisura se encuentra abierta, y cero si se encuentra cerrada. Sin embargo, ABAQUS estima valores negativos del FIT en los puntos del frente de fisura que se encuentran en estado cerrado. En este estudio, se considerarán todos los valores negativos obtenidos, nulos.

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

3.1.- INTRODUCCIÓN

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es una de las herramientas de cálculo y resolución numérica de problemas por ordenador más potentes utilizadas en el ámbito de la ingeniería. Gracias a este sistema se pueden resolver casos que por medio de métodos matemáticos tradicionales serían casi imposibles de realizar. Además, el MEF no obliga a la construcción de prototipos que deben ser ensayados y cuyas posibles mejoras se realizan de forma iterativa. Esto conlleva un gran ahorro económico y de tiempo en la industria.

El MEF permite simular un modelo del sistema real más fácil de modificar y más barato que un prototipo; sin embargo no hay que olvidar que se trata de una

aproximación de la realidad debido a las hipótesis básicas del método. Por ello, los prototipos siguen siendo necesarios, aunque en menor medida, ya que el modelo simulado puede acercarse bastante al diseño óptimo. Este acercamiento dependerá de la complejidad de la geometría, las condiciones de contorno del modelo, y el manejo correcto del programa.

3.2.- CONCEPTOS BÁSICOS DEL MÉTODO

El método consiste en la transformación de modelos o cuerpos continuos, en un modelo discreto aproximado. A esta transformación se le denomina discretización del modelo.

El cuerpo o pieza se divide en un número finito de pequeñas partes denominadas elementos. Los elementos se encuentran interconectados entre ellos por una serie de puntos llamados nodos. Variables características como las propiedades del material del que está fabricada la pieza y las ecuaciones que rigen su comportamiento, son consideradas individualmente sobre dichos elementos. Un sistema continuo complejo tiene infinitos grados de libertad y está regido por un sistema de ecuaciones diferenciales. Gracias la MEF lo convertimos en un sistema de elementos con un número finito de grados de libertad, cuyo comportamiento se rige por un sistema de ecuaciones lineales o no lineales.

En todos los sistemas que se pueden analizar por el método de los elementos finitos se pueden distinguir:

- **Dominio:** Se trata del espacio geométrico donde se va a definir el modelo.
- **Condiciones de contorno:** Son variables conocidas que condicionan el cambio del sistema; en nuestro caso son las cargas y los apoyos, que impiden el desplazamiento del eje (no su giro).
- **Incógnitas:** Son el objetivo del estudio, variables desconocidas que se calculan tras la actuación de las condiciones de contorno sobre el sistema. Pueden ser

tensiones, desplazamientos, etc. En nuestro problema es el Factor de Intensidad de Tensiones FIT.

Conocidos estos conceptos se puede decir que el dominio se discretiza en subdominios (elementos). Si se tratase de un modelo lineal, el dominio se dividiría en los elementos correspondientes mediante puntos. En el caso de un modelo bidimensional sería mediante líneas, y en el caso tridimensional, el que acontece, mediante superficies imaginarias, de forma que el dominio total en estudio se aproxime mediante el conjunto de elementos que lo subdivide.

En el método de elementos finitos cabe destacar las tres etapas que sigue el proceso:

- **Preproceso:** Se trata de la elaboración del modelo que se va a simular, definiendo el dominio y las condiciones de contorno.
 - Diseño geométrico del modelo.
 - Propiedades de los materiales empleados.
 - Sistema de cargas exteriores y demás condiciones de contorno.
 - Discretización del modelo. Mallado del dominio.
- **Resolución:** Aquí se realizan las operaciones de cálculo necesarias para la obtención de las soluciones deseadas.
 - Selección del tipo de cálculo a realizar.
 - Configuración de los parámetros de cálculo, intervalos de tiempo y número de iteraciones.
 - Transferencia de las cargas al modelo, generación de funciones de forma, ensamblaje de la matriz de rigidez, resolución de sistemas de ecuaciones y obtención de la solución.
- **Postproceso:** En esta etapa se realiza la representación gráfica de los resultados, así como la obtención de resultados indirectos operando las soluciones del modelo.

3.3.- *MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS CON “ABAQUS 6.7”*

Para la creación de un modelo se utiliza ABAQUS/Cae, que es una interfaz de ABAQUS para manipular, visualizar y evaluar los resultados de las simulaciones de ABAQUS/Standard y ABAQUS/Explicit. ABAQUS/Cae está dividido en diferentes módulos para facilitar la implementación del modelo. Cada módulo define un proceso del modelaje como la geometría, las propiedades del material, y finalmente la generación de una malla acorde a las necesidades del análisis a realizar. Los módulos aportan opciones, parámetros y datos que forman un archivo de entrada que se somete a un análisis de ABAQUS/Standard o ABAQUS/Explicit. La información de salida se vuelve a enviar a ABAQUS/Cae para monitorear el proceso de trabajo, y crear una base de datos de resultados. Con ABAQUS/Cae se pueden leer y visualizar los resultados del análisis.

Estos son los diferentes módulos de ABAQUS/Cae:

- **Part:** Lo primero que se define es la geometría de la pieza o las piezas que componen el modelo. Este módulo da paso al módulo “Sketch”, que ayuda a crear el modelo. ABAQUS es capaz de modelar geometrías muy complejas. A la hora de definir la geometría es conveniente tener previsto cómo son las condiciones de contorno y el mallado para realizar las particiones oportunas en el modelo.
- **Property:** Aquí se definen las propiedades del material o los materiales del que está hecha la pieza.
- **Assembly:** En este módulo se realiza el proceso de ensamblado de las piezas del modelo, estableciendo la relación que existe entre ellas y su posición relativa con respecto a las demás.
- **Step:** Permite dividir el análisis en una secuencia de una o más etapas diferentes. Es una manera conveniente de realizar el análisis, ya que se pueden captar cambios en las condiciones de contorno y en el propio modelo durante el transcurso del análisis completo.

- **Interaction:** Se usa para definir las interacciones mecánicas o térmicas entre las partes del modelo, o entre el modelo y sus alrededores. Se pueden establecer las limitaciones de las regiones, sus conexiones con otras, o con la “tierra”.
- **Load:** Aquí se definen las condiciones de contorno tales como el sistema de cargas al que está sometido el modelo y sus apoyos u otro tipo de impedimento al desplazamiento.
- **Mesh:** Este módulo contiene herramientas que permiten generar mallas de diferentes tipos, usando elementos de geometrías distintas. También contiene funciones para el refinamiento de la malla y para su verificación.
- **Job:** En este módulo se crea el trabajo de análisis, y donde se monitorea durante todo el proceso. Da paso al módulo “Visualization”.
- **Visualization:** Aquí se pueden visualizar diagramas de resultados, imágenes de deformadas y demás datos calculados durante el análisis.
- **Sketch:** Este módulo se encarga de realizar bocetos bidimensionales que ayudan a definir la geometría del modelo. Dicho esquema representa una parte plana, pero este módulo tiene herramientas para barrer dicha geometría planar, dando lugar a una parte tridimensional.



CAPÍTULO 4

MODELO NUMÉRICO

4.1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Se tiene un eje cilíndrico de aluminio, de longitud $L= 90$ cm, y diámetro $D= 2$ cm, apoyado en sus dos extremos. El eje tiene una fisura elíptica en su parte central cuya geometría se define más adelante. Además se encuentra sometido a dos cargas puntuales de valor $F= 100$ N, situadas a 223 mm de cada apoyo, como se muestra en la Fig. 4.1.

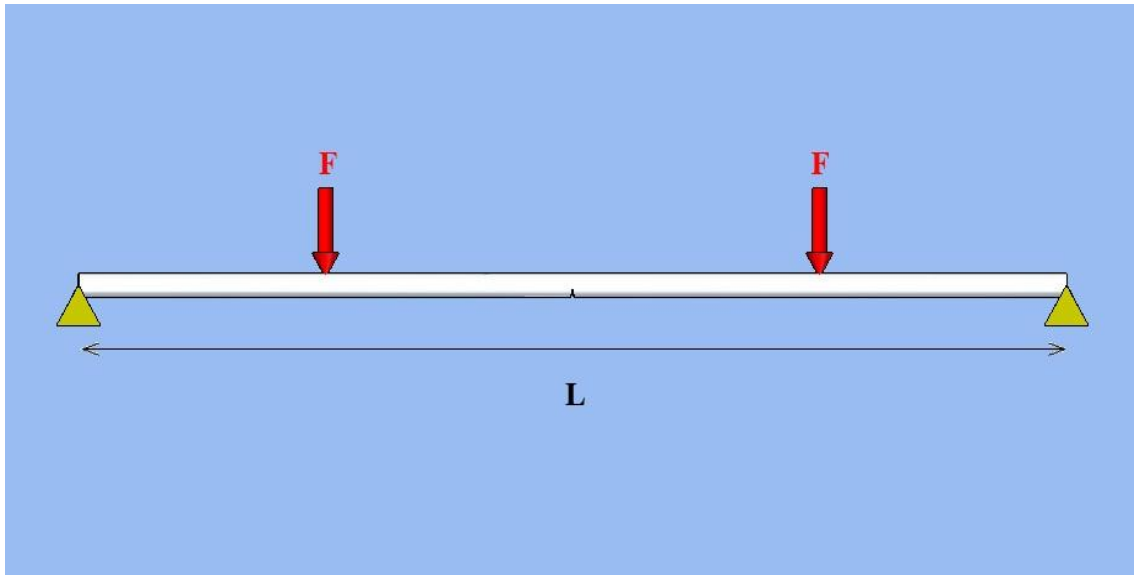


Fig. 4.1. Eje fisurado biapoyado sometido a cargas.

4.2.- REALIZACIÓN DE LA SIMULACIÓN MEDIANTE “ABAQUS 6.7”

En este apartado se explica el desarrollo del modelo para sus 160 variaciones geométricas, y su posterior simulación [ABAQUS, 2004].

- **Módulo “PART”:**

En primer lugar, se utiliza el módulo *Part* para crear dos cilindros macizos correspondientes a cada mitad del eje. En este caso los cilindros tienen un diámetro de 20 mm, y una longitud de 450 mm, (no se olvide que se trata de la mitad, pues el eje tiene una longitud de 900 mm).

A lo largo de las dos mitades (*Part-1* y *Part-2*) se tienen que crear diversas particiones geométricas (Fig. 4.2).

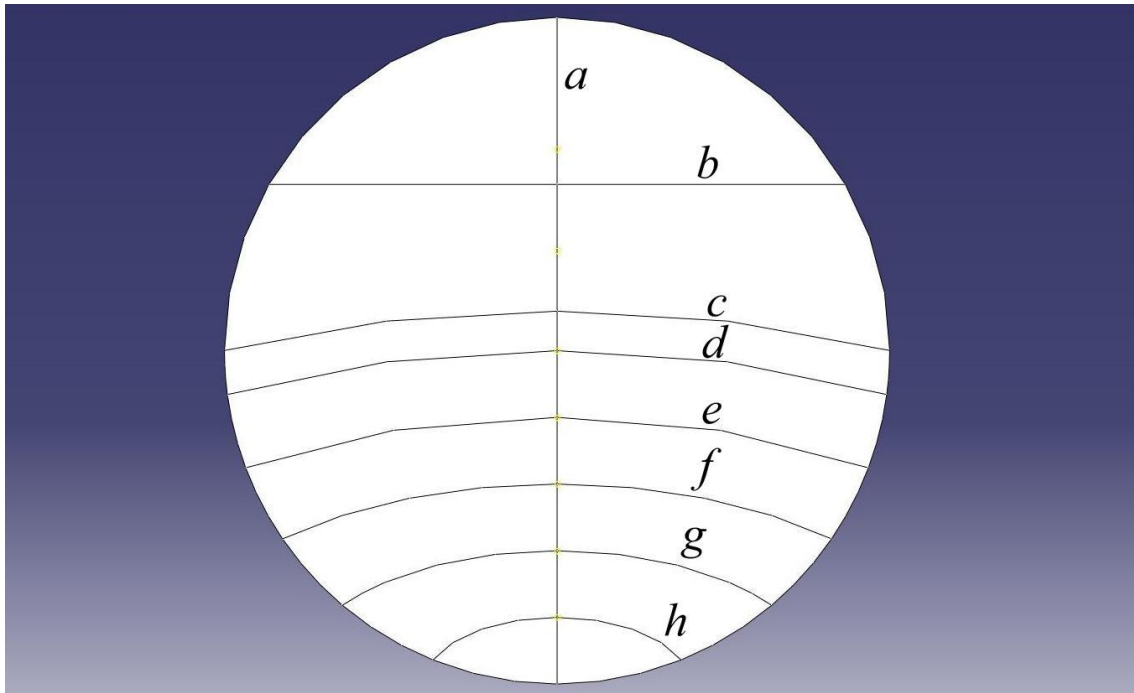


Fig. 4.2. Particiones longitudinales del eje.

En la figura 4.2 se muestran las particiones longitudinales del eje. La partición “a” corresponde a un plano longitudinal vertical que pasa por el centro del eje, y sirve para estructurar el mallado de forma simétrica con respecto a este plano. La siguiente partición, “b”, es un plano horizontal situado por encima del centro del eje cuya función es estructurar el mallado en la parte superior del eje. La partición “c”, al igual que la anterior sirve para estructurar el mallado.

Las particiones “d”, “e”, “f”, “g” y “h” son las correspondientes a las cinco profundidades de fisura de cada factor de forma β . Las particiones “a” y “b” permanecen invariantes a lo largo de los 160 casos del estudio, mientras que las seis restantes varían con el factor de forma β .

Además de las particiones creadas, son necesarias dos más en cada mitad del eje, que son transversales (Fig. 4.3). La primera, “m”, está a 223 mm del extremo izquierdo y es en esta sección transversal donde se colocará la carga en sus diferentes posiciones angulares. A una distancia del extremo derecho de 4 mm se crea la segunda partición transversal, “n”, que tiene como único fin acotar una zona próxima a la fisura para la introducción de una malla más refinada.

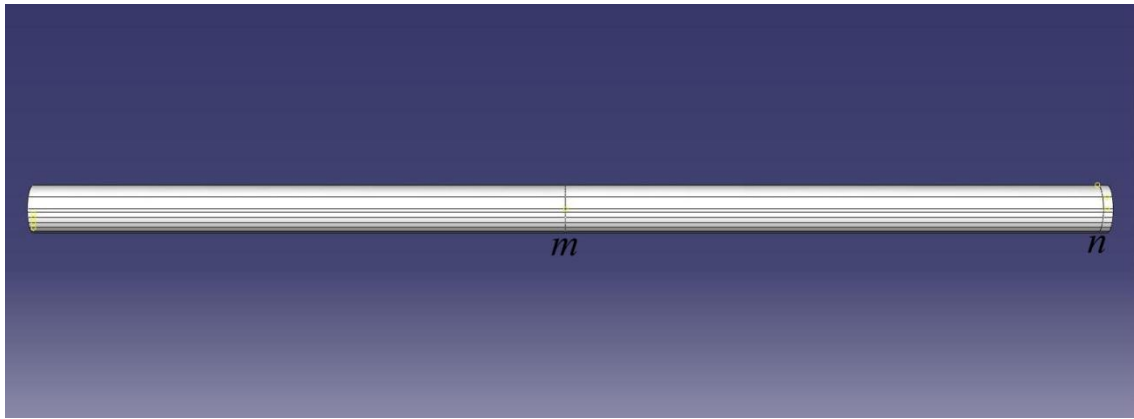


Fig. 4.3. Particiones transversales del eje.

- **Módulo “PROPERTY”:**

Este módulo se usa para crear el material de las partes o piezas del problema a simular y definir sus propiedades. A las dos partes creadas, se les confieren las propiedades del aluminio: módulo de elasticidad $E= 72$ GPa, coeficiente de Poisson $\gamma= 0.33$ y densidad $\rho= 2800$ kg/m³.

- **Módulo “ASSEMBLY”:**

Haciendo uso del módulo *Assembly* se define la geometría del modelo finalizado (Fig. 4.4) a través de la creación de una instancia de las partes creadas anteriormente, para luego ensamblarlas en el sistema global de coordenadas por la sección central no fisurada.

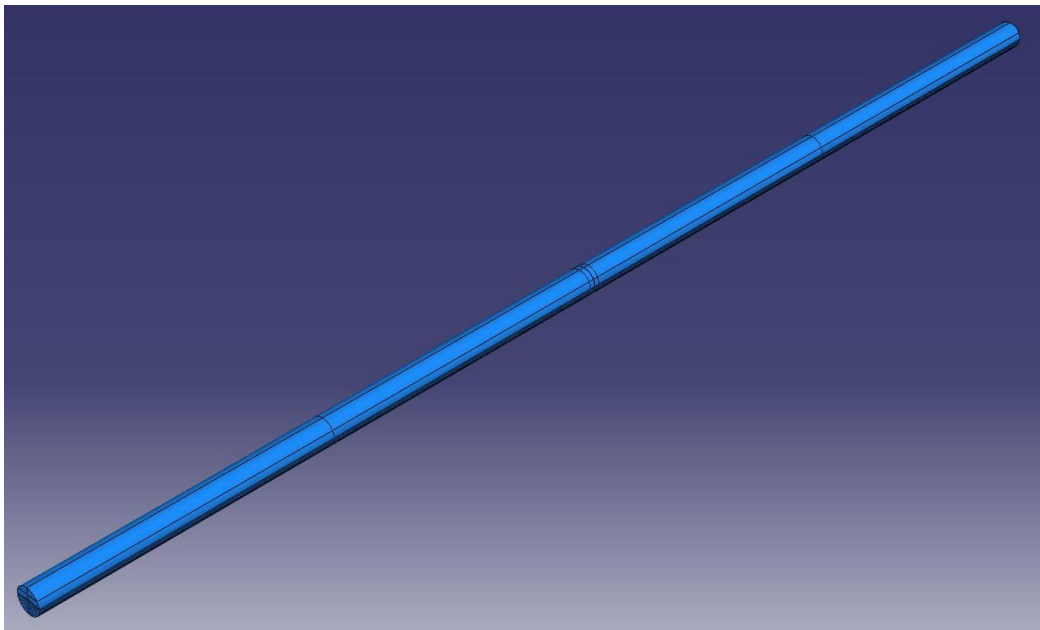


Fig. 4.4. Ensamblado de las dos mitades del eje.

- **Módulo “STEP”:**

En este supuesto solo se creará una etapa (*Step-1*) además del estado inicial (*Initial*). En *Initial* se asignan al eje condiciones de contorno como la interacción entre los dos semiejes, es decir, la unión por la parte no fisurada del plano de unión. El eje se encuentra en reposo. En *Step-1* el eje se someterá a las cargas establecidas.

Los parámetros asignados en estos tres últimos módulos (*PROPERTY*, *ASSEMBLY* y *STEP*) permanecerán sin alterarse en los 160 casos del estudio.

- **Módulo “INTERACTION”:**

Como se menciona anteriormente se crea el modelo uniendo las dos mitades por la sección fisurada. En este módulo se crea la restricción (*Constraint*) de tipo unión entre las dos mitades en la parte no fisurada.

ABAQUS no reconoce el contacto mecánico entre las partes o regiones de un ensamblado a menos que el contacto se especifique en el módulo de interacción, la mera proximidad física de dos superficies de un ensamblaje no es suficiente para indicar cualquier tipo de interacción entre estas, aunque se trate de superficies deformables o rígidas. Para ello se aplicará una interacción (*Interaction*) del tipo *Surface-to-surface contact* sobre las superficies de la fisura que impedirá sus desplazamientos, para evitar que, cuando la fisura se encuentre en estado cerrado, una de las caras de la fisura penetre en la otra.

Finalmente se designa el frente de fisura en las dos partes (*Crack-1* y *Crack-2*). En función de la longitud característica de fisura α con la que se esté trabajando, se colocará el frente de fisura sobre las diferentes particiones con dicha función (Fig. 4.5).

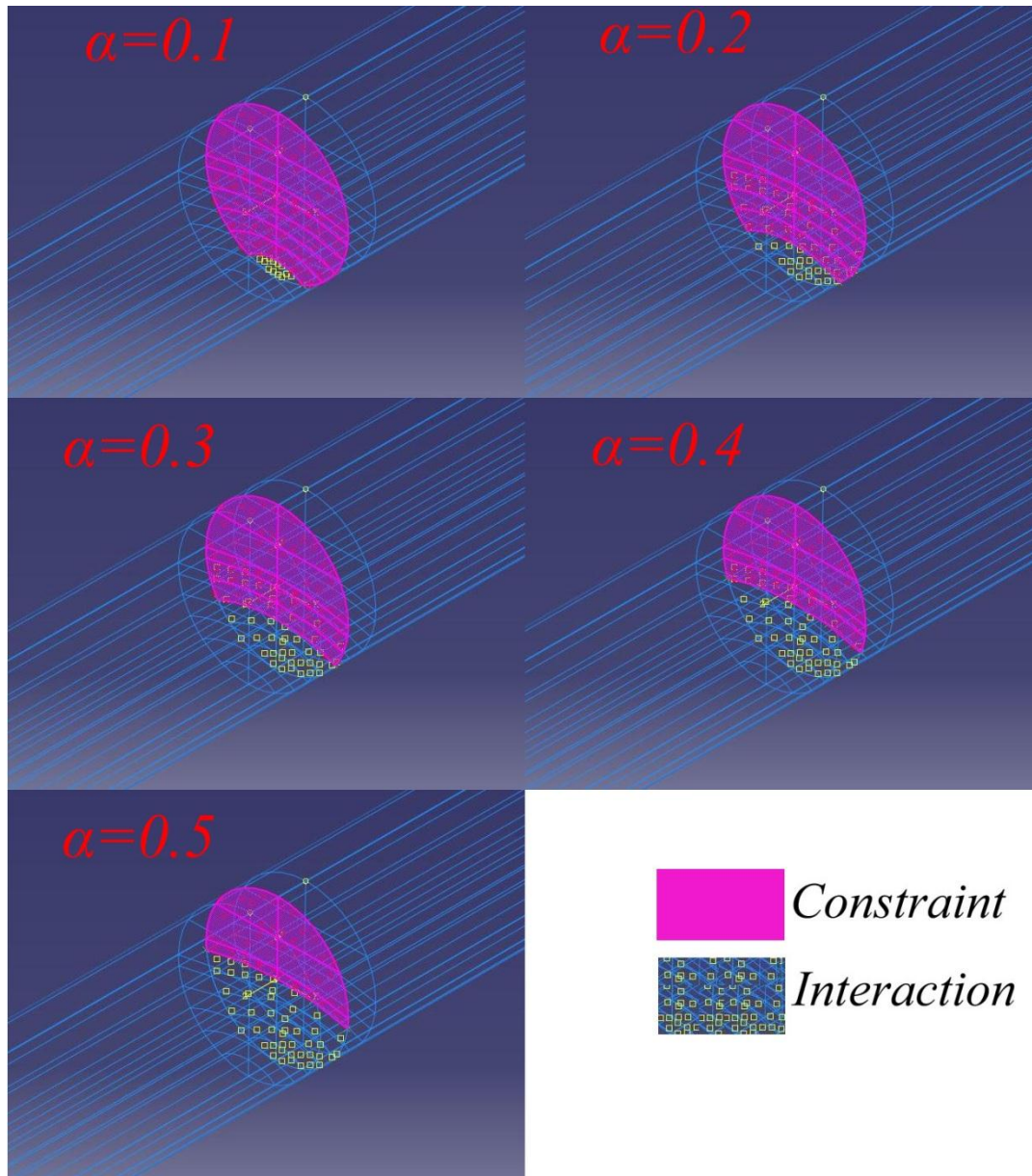


Fig. 4.5. Interacciones y restricciones para las diferentes profundidades de fisura.

- **Módulo “LOAD”:**

Aquí se crean las dos cargas de 100 N (*Load-1* y *Load-2*) y se sitúan en la partición correspondiente. También los dos apoyos (*BC-1* y *BC-2*) restringiendo dos grados de libertad en los extremos. Tanto las cargas como los apoyos (Fig. 4.6) se girarán sobre el eje para simular las ocho posiciones angulares mencionadas con anterioridad.

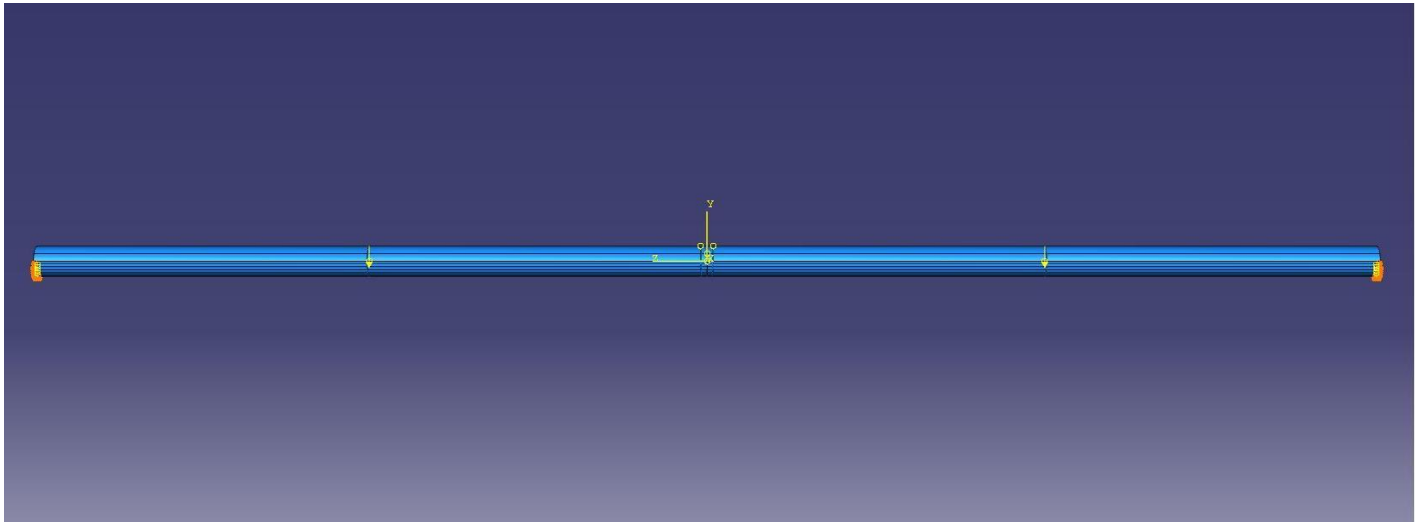
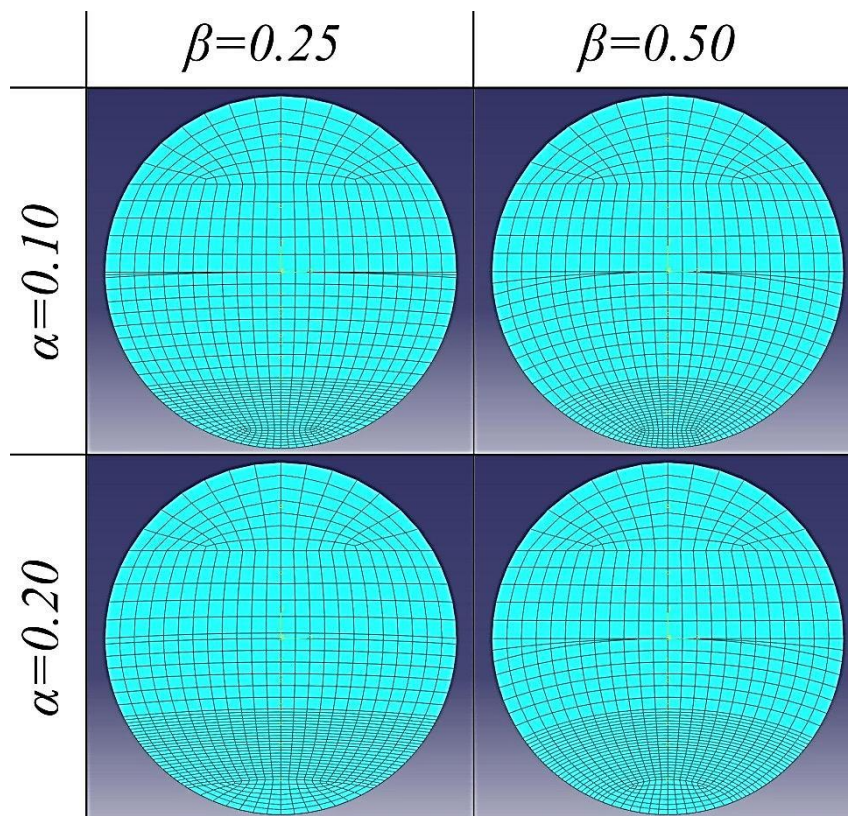


Fig. 4.6. Eje biapoyado sometido a carga.

- **Módulo “MESH”:**

Los mallados realizados para todos los casos se muestran a continuación:



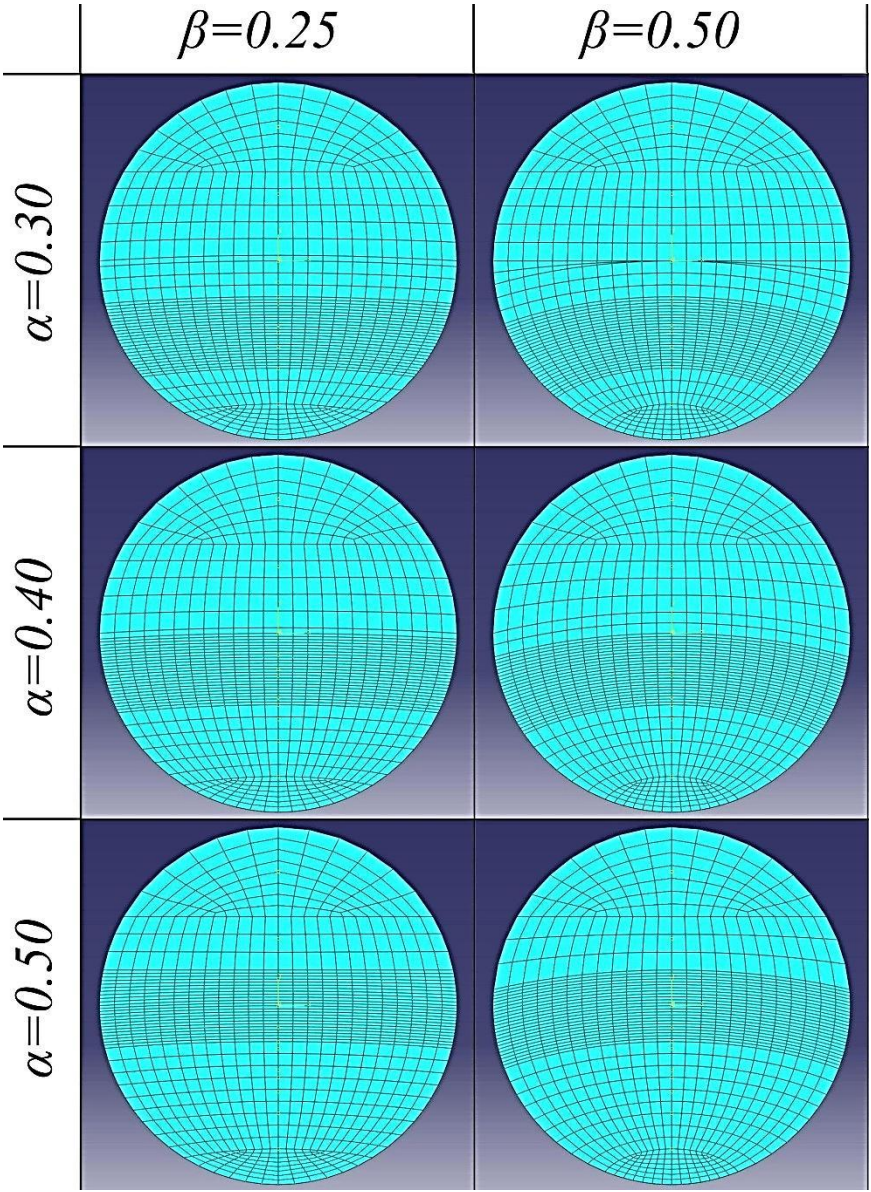
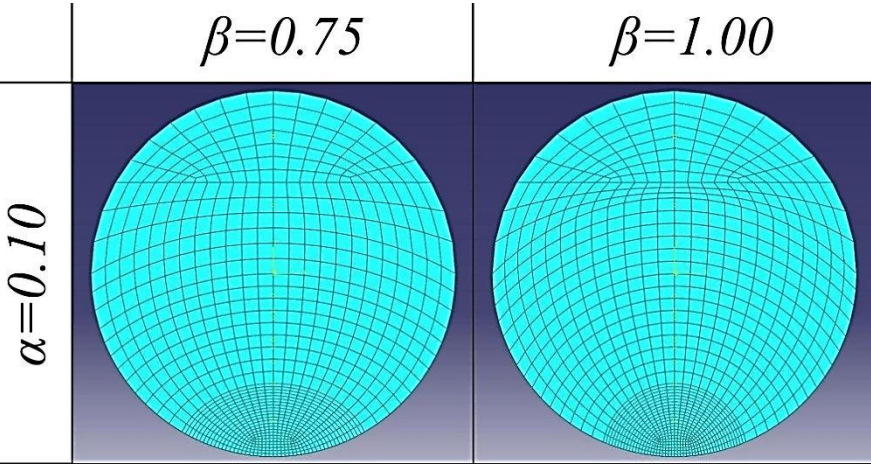


Fig. 4.7. Mallados longitudinales para los factores de forma $\beta=0.25$ y $\beta=0.50$.



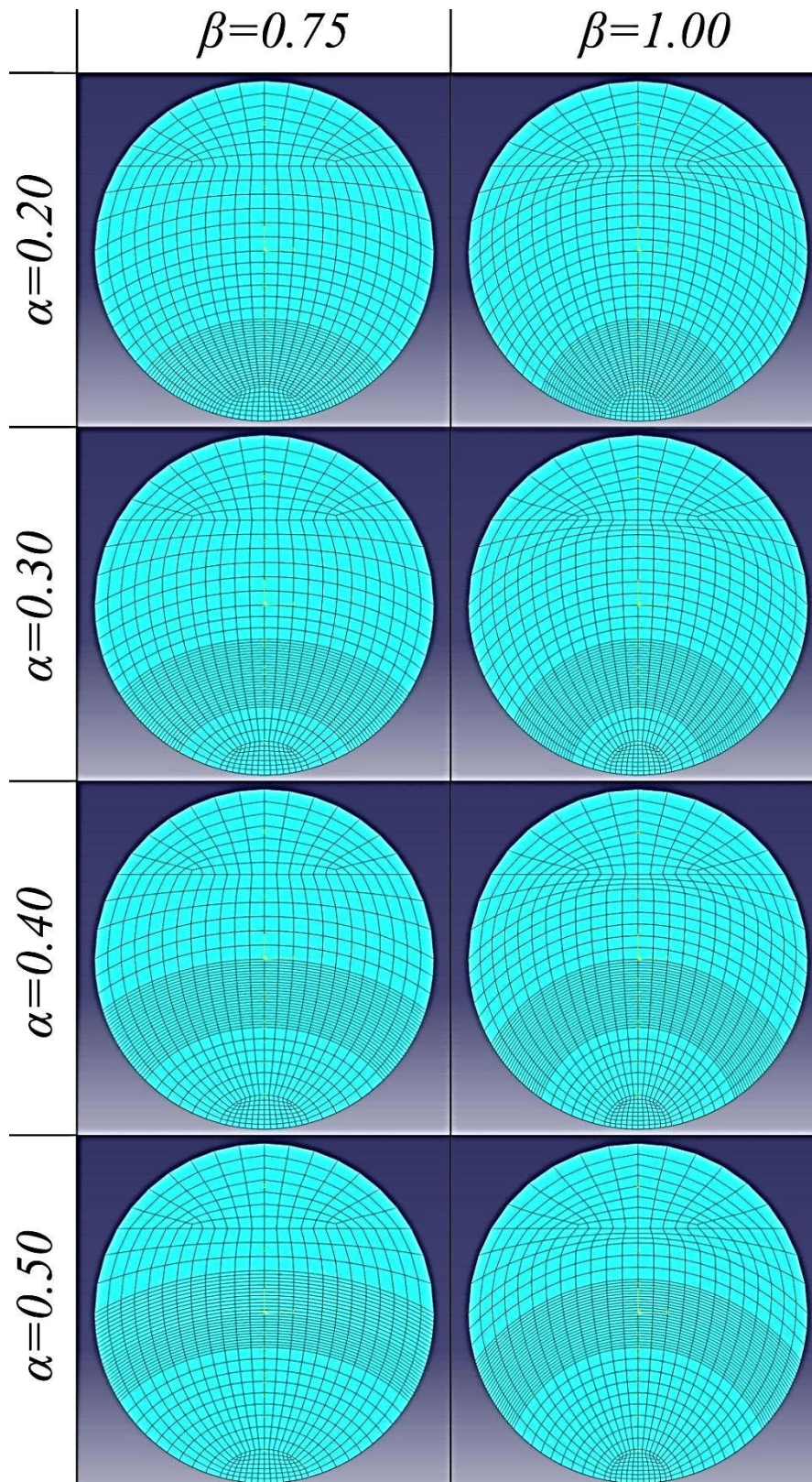


Fig. 4.8. Mallados longitudinales para los factores de forma $\beta=0.75$ y $\beta=1.00$.

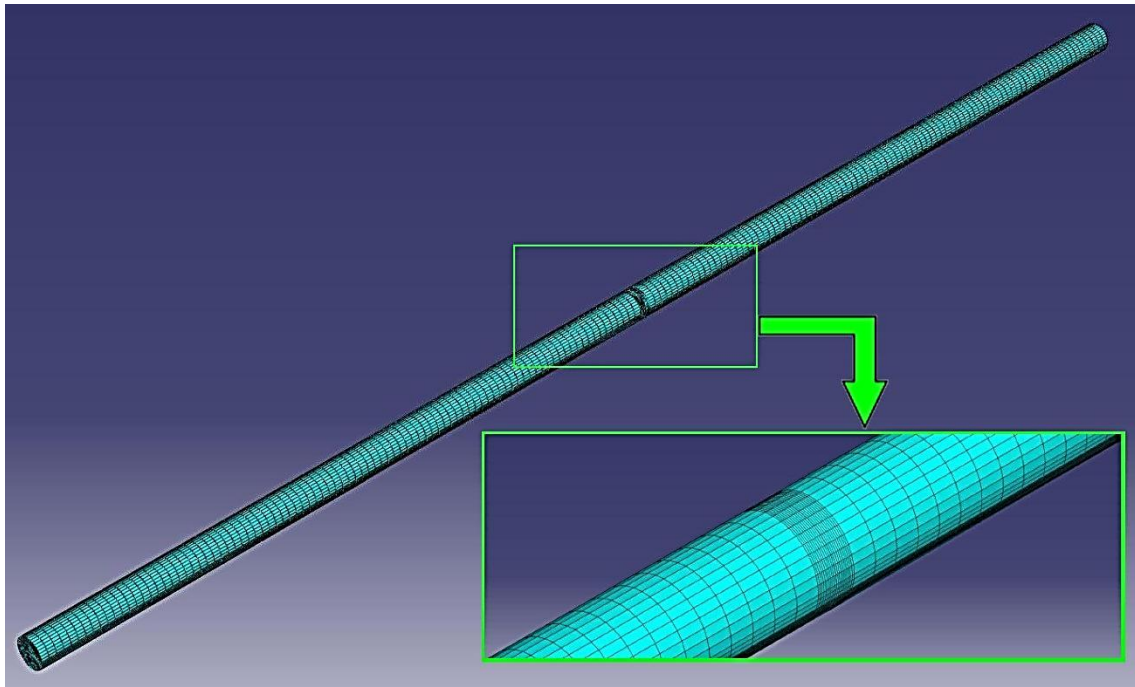


Fig. 4.9. Mallado transversal con detalle de refinado próximo a la fisura.

En las figuras 4.5 a 4.7 se puede apreciar que en las zonas próximas a la fisura la malla es más fina.

Cada mitad del eje debería estar dividido en unos 115.000-120.000 elementos. Más elementos, con seguridad, provocarían un error de ABAQUS, abortando el proceso de cálculo.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

5.1.- FENÓMENO DE APERTURA Y CIERRE DE LA FISURA

Muchos estudios sostienen que el factor de intensidad de tensiones (FIT) toma valores positivos cuando la fisura está sometida a esfuerzos de tracción y por lo tanto, se encuentra en estado abierto. Por el contrario cuando los esfuerzos son de compresión, la fisura está cerrada y el FIT toma valores negativos. El programa ABAQUS lo interpreta de la misma manera, sin embargo cuando la fisura está cerrada el contacto entre las superficies de la fisura impide su desplazamiento, de tal manera que el FIT debería ser nulo. De modo que los valores negativos de FIT correspondientes a los esfuerzos de compresión se deberían considerar cero.

A continuación se muestran los resultados obtenidos del FIT a lo largo de los frentes de fisura para las ocho posiciones angulares mencionadas con anterioridad.

• **Fisura con factor de forma $\beta=0.25$ y profundidad $\alpha=0.1$:**

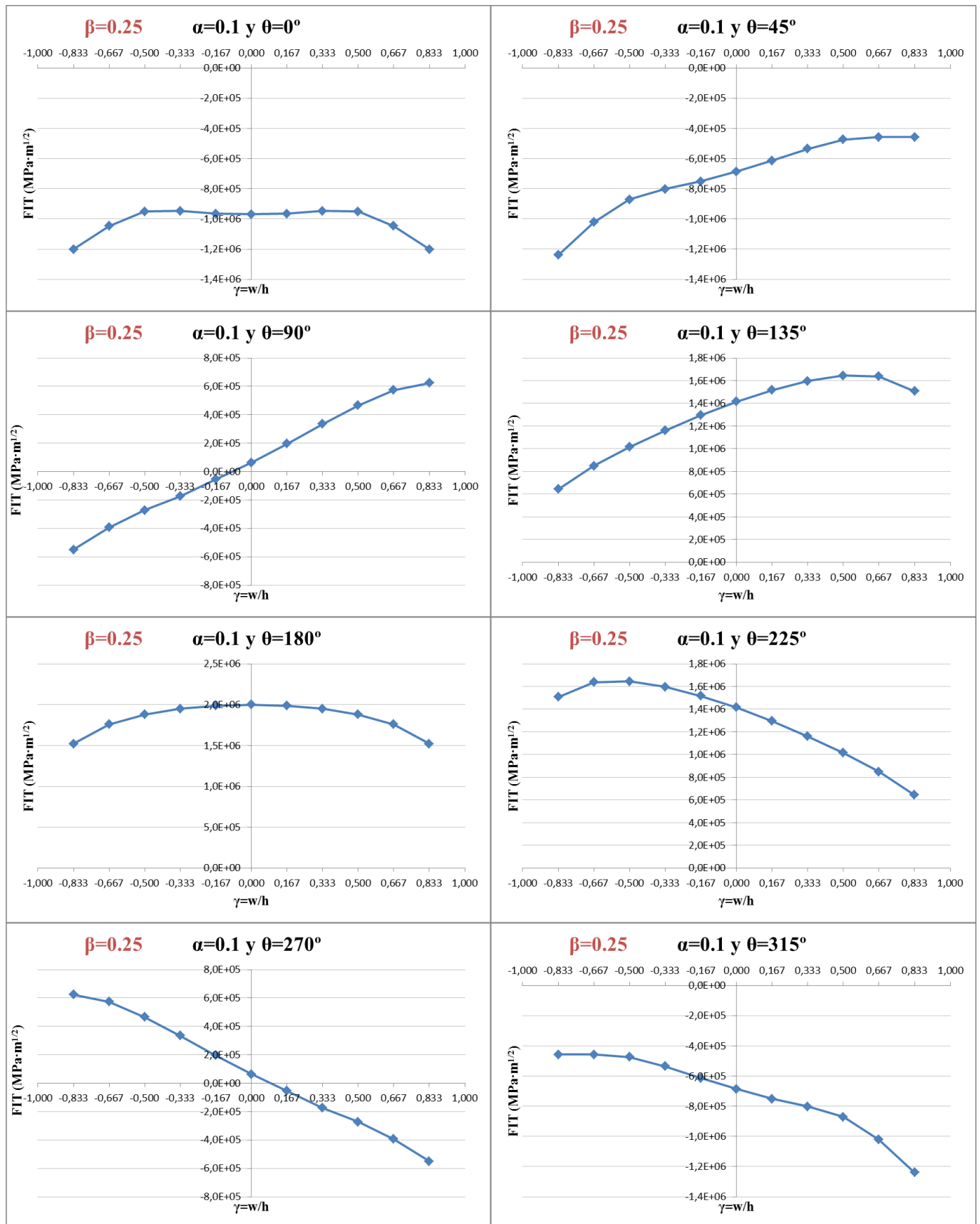


Fig. 5.1. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.1$ para las ocho posiciones angulares.

En la Figura 5.1 se muestran los valores del FIT correspondientes a una fisura de profundidad $\alpha=0.1$ y factor de forma $\beta=0.25$. En este primer ejemplo ya se aprecia lo poco lineal que resulta el proceso de apertura y cierre de la fisura.

En la posición angular de 45° la grieta aún permanece cerrada, sin embargo en la siguiente posición, 90° , más de la mitad de la fisura se encuentra en estado abierto. A 135° está totalmente abierta, antes de realizar la mitad del giro.

De la misma manera que se ha abierto se irá cerrando en las posiciones angulares sucesivas hasta alcanzar la posición inicial. Esto va a suceder en todos los casos de este estudio.

En la siguiente figura (Fig. 5.2) se ven los valores del FIT de esta fisura en las ocho posiciones angulares agrupadas en una misma gráfica:

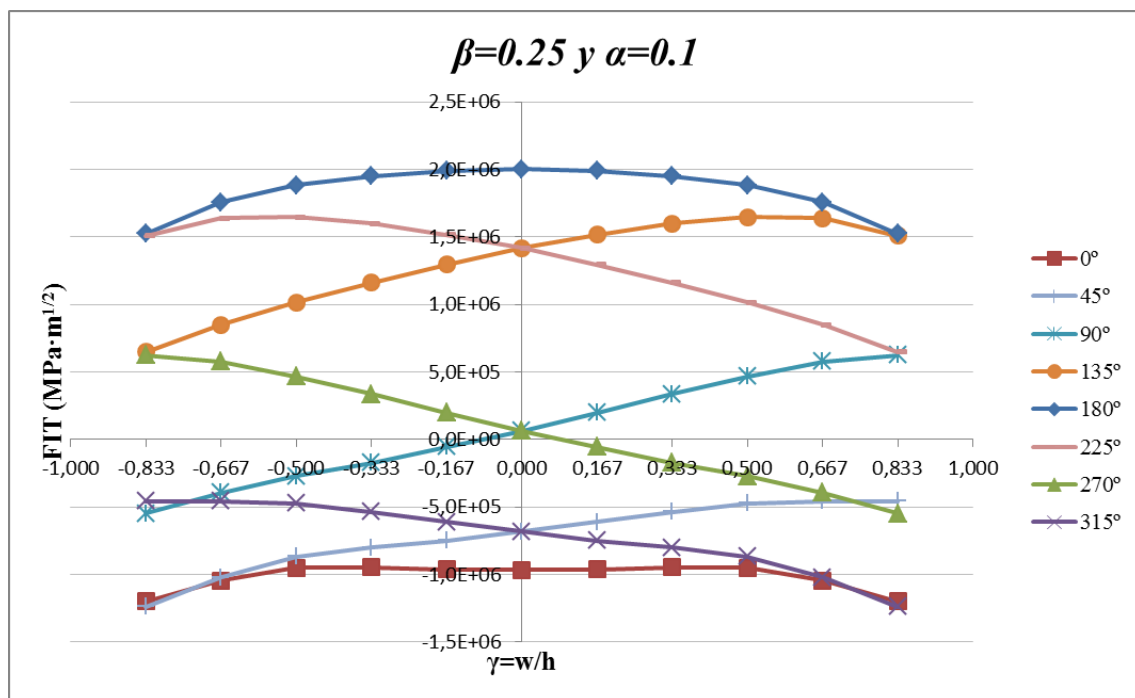


Fig. 5.2. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.1$ a lo largo de un giro completo.

• **Fisura con factor de forma $\beta=0.25$ y profundidad $\alpha=0.2$:**

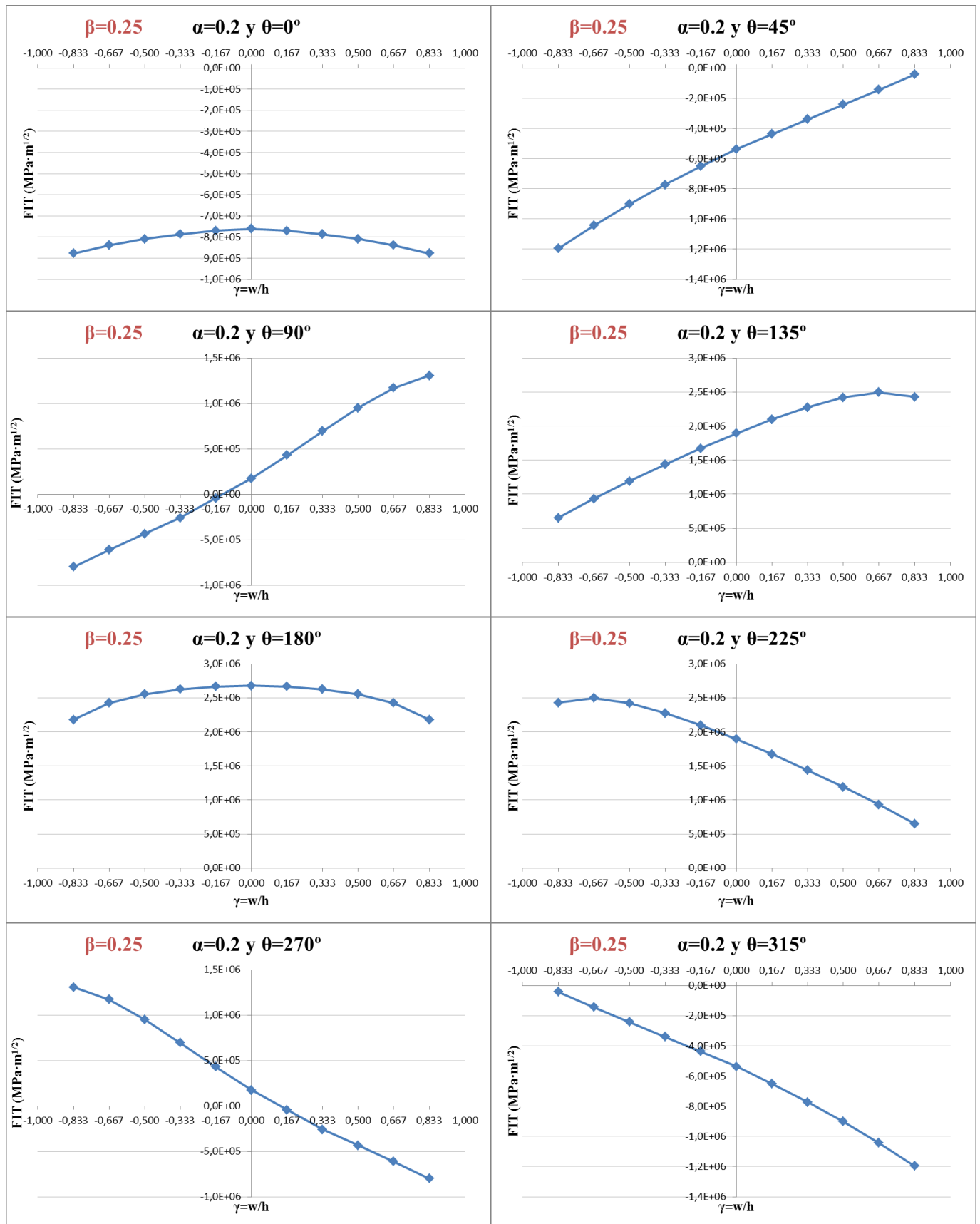


Fig. 5.3. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.2$ para las ocho posiciones angulares.

Para un mismo factor de forma $\beta=0.25$ pero aumentando la profundidad de la fisura a $\alpha=0.2$ se obtienen gráficas muy similares (Fig. 5.3). El aumento de profundidad hace que se alcancen valores del FIT superiores a los que se vieron para la profundidad $\alpha=0.1$ en cualquier punto de la fisura en todas las posiciones angulares.

En la posición de 45° se ve que aunque esté cerrada, se encuentra más próxima a abrirse que antes. En este caso, a 90° la fisura está más abierta que en la profundidad $\alpha=0.1$.

Para la profundidad $\alpha=0.1$ los valores máximos del FIT en cualquier punto de la fisura se daban en la posición angular de 180° (Fig. 5.2). Sin embargo el aumento de la profundidad ha provocado que el máximo FIT que se alcanza en los extremos de la fisura, sea en las posiciones angulares de 135° y 225° .

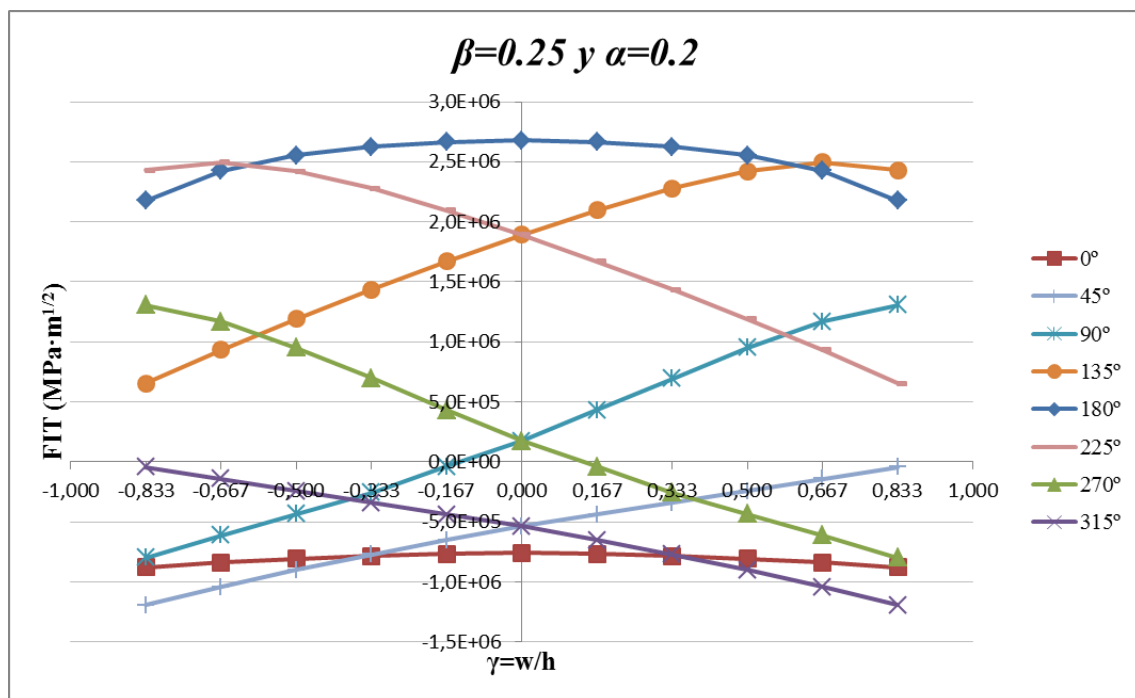


Fig. 5.4. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.2$ a lo largo de un giro completo.

El aumento de los valores del FIT a lo largo de toda la fisura, y el incremento del FIT en los extremos en las posiciones de 135° y 225° con respecto a la posición de 180° , irán creciendo conforme se vaya aumentando la profundidad en los tres siguientes casos ($\alpha=0.3$, $\alpha=0.4$ y $\alpha=0.5$).

• **Fisura con factor de forma $\beta=0.25$ y profundidad $\alpha=0.3$:**

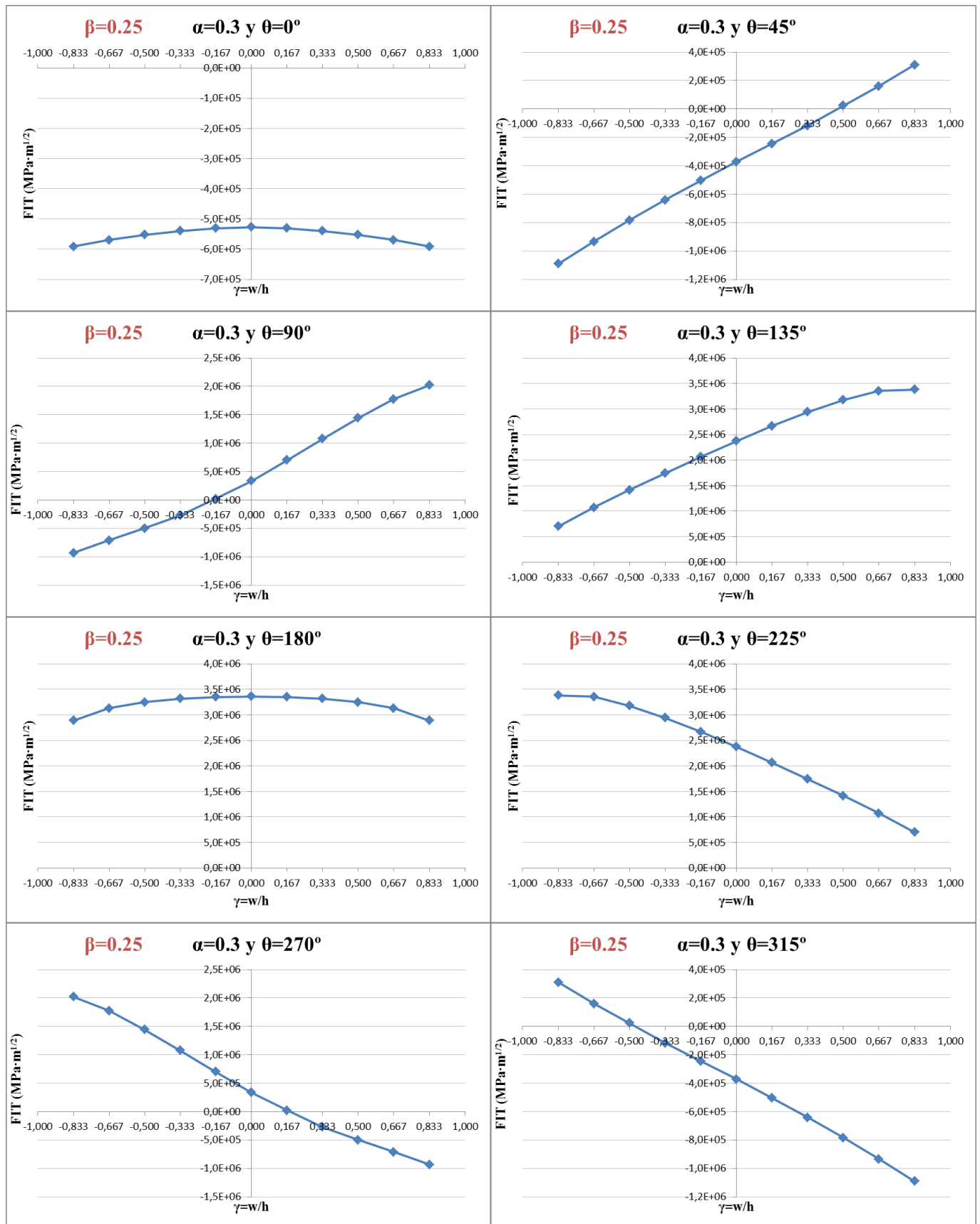


Fig. 5.5. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.3$ para las ocho posiciones angulares.

A la profundidad de $\alpha=0.3$ para la posición angular de 45° , casi un cuarto de la fisura se encuentra en estado abierto, lo que denota el aumento de la apertura de la fisura en esta posición angular con el aumento de la profundidad (Fig. 5.5).

Además el máximo valor del FIT que a menos profundidad se daba en el centro de la fisura en la posición angular de 180° , ha sido ligeramente rebasado por los valores alcanzados en los extremos de la fisura en las posiciones de 135° y 225° (Fig. 5.6).

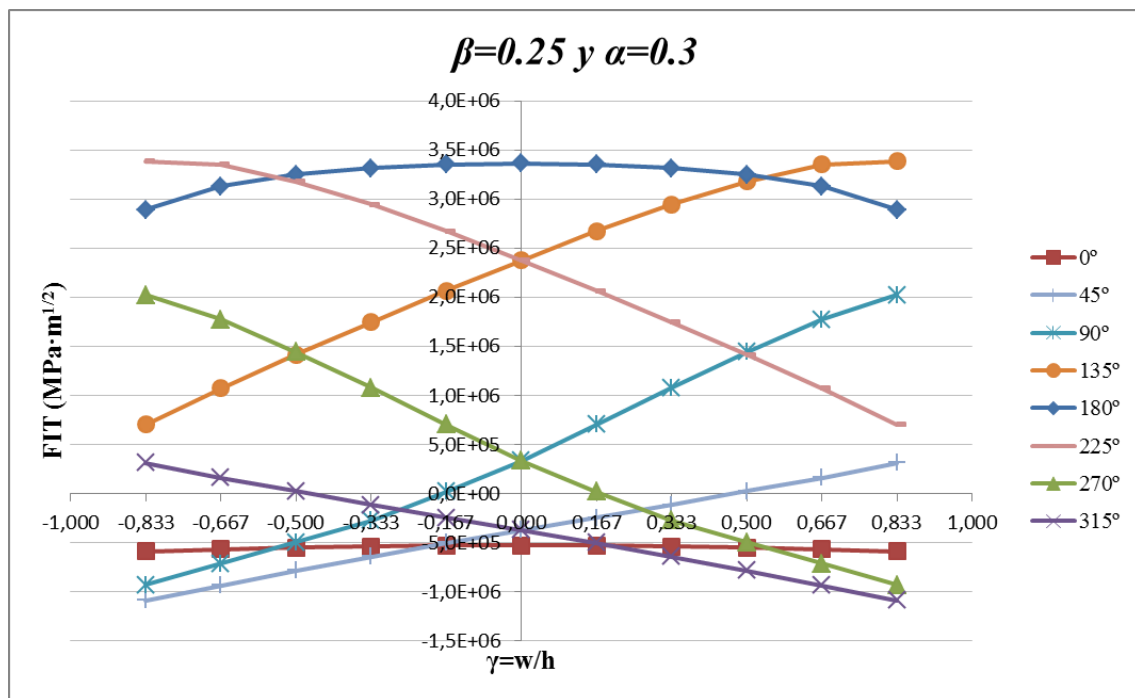


Fig. 5.6. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.3$ a lo largo de un giro completo.

• **Fisura con factor de forma $\beta=0.25$ y profundidad $\alpha=0.4$:**

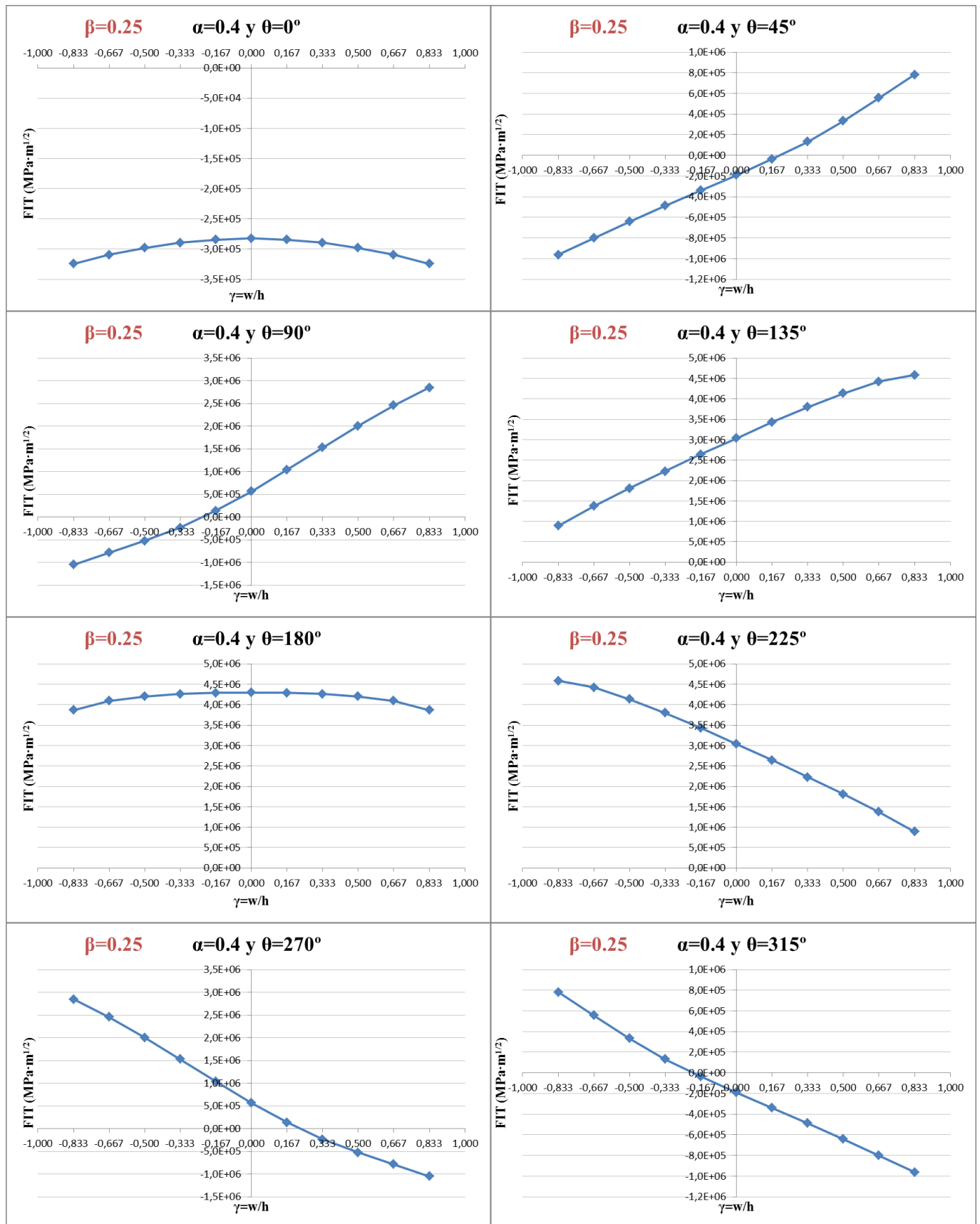


Fig. 5.7. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.4$ para las ocho posiciones angulares.

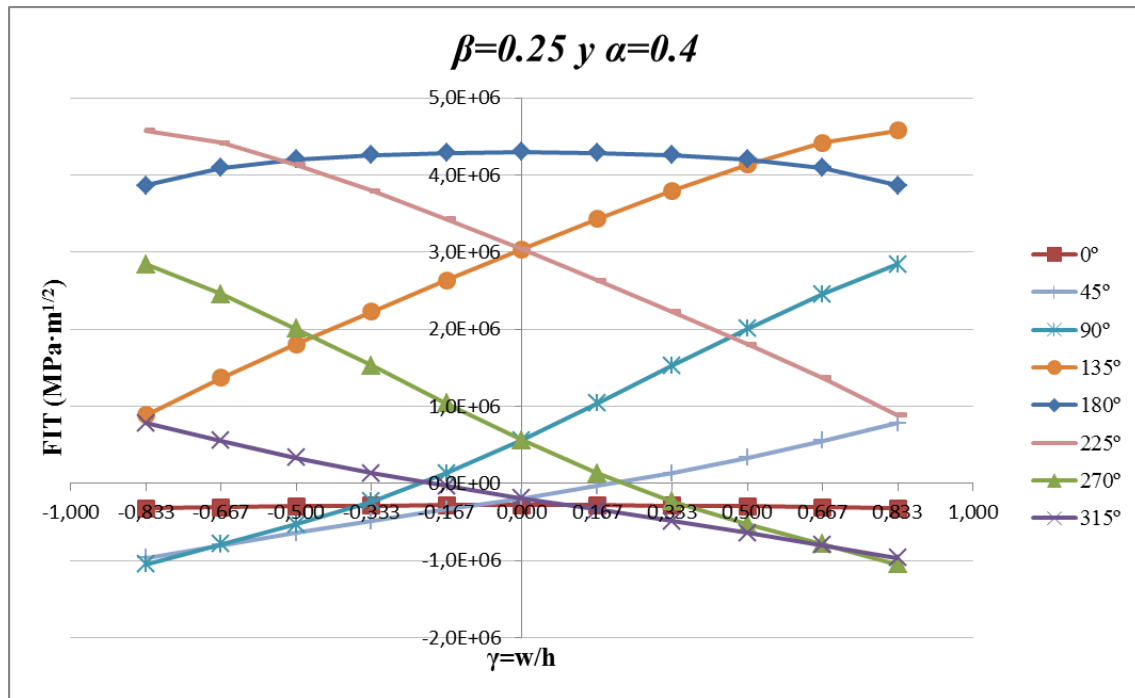


Fig. 5.8. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.4$ a lo largo de un giro completo.

• **Fisura con factor de forma $\beta=0.25$ y profundidad $\alpha=0.5$:**

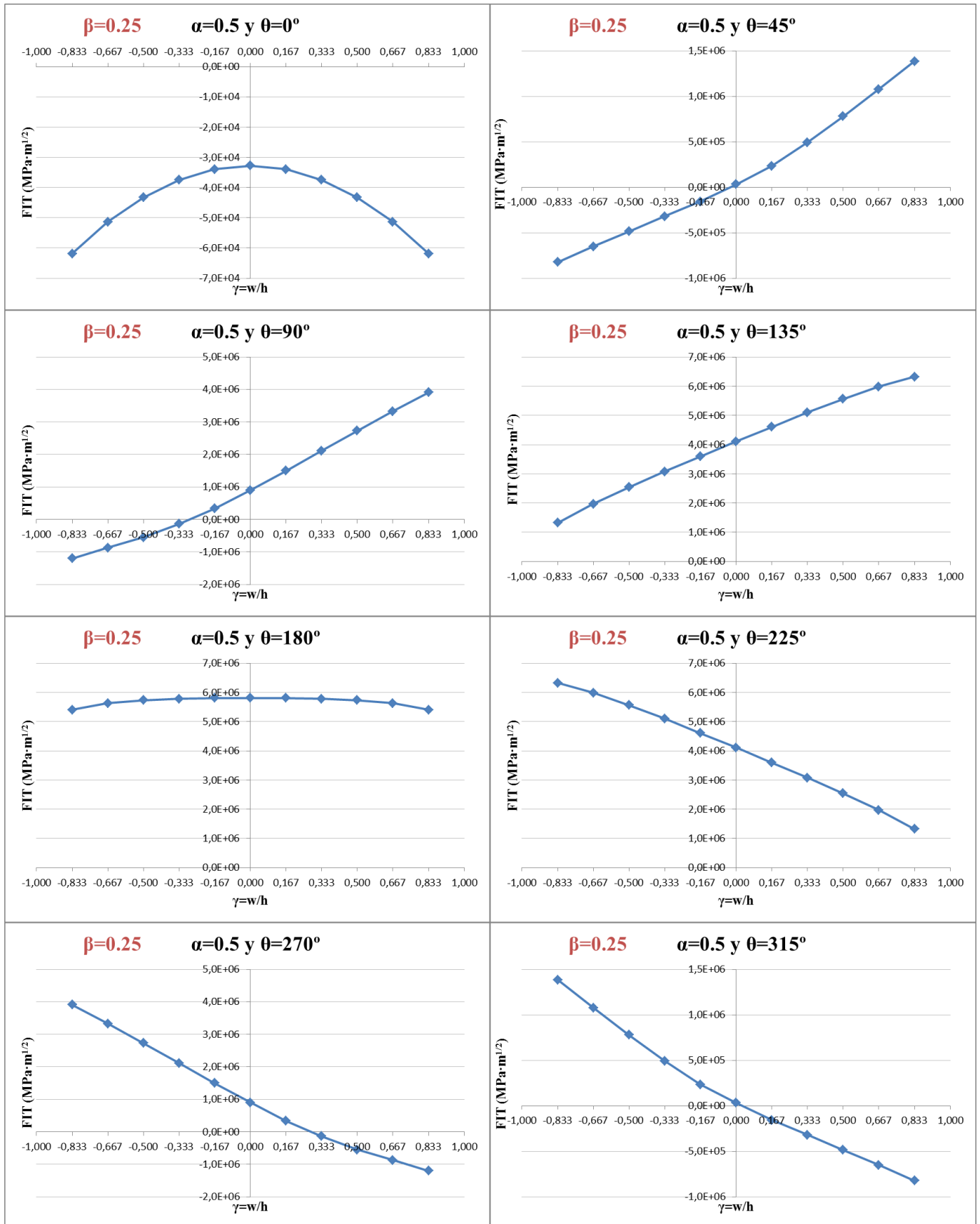


Fig. 5.9. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.5$ para las ocho posiciones angulares.

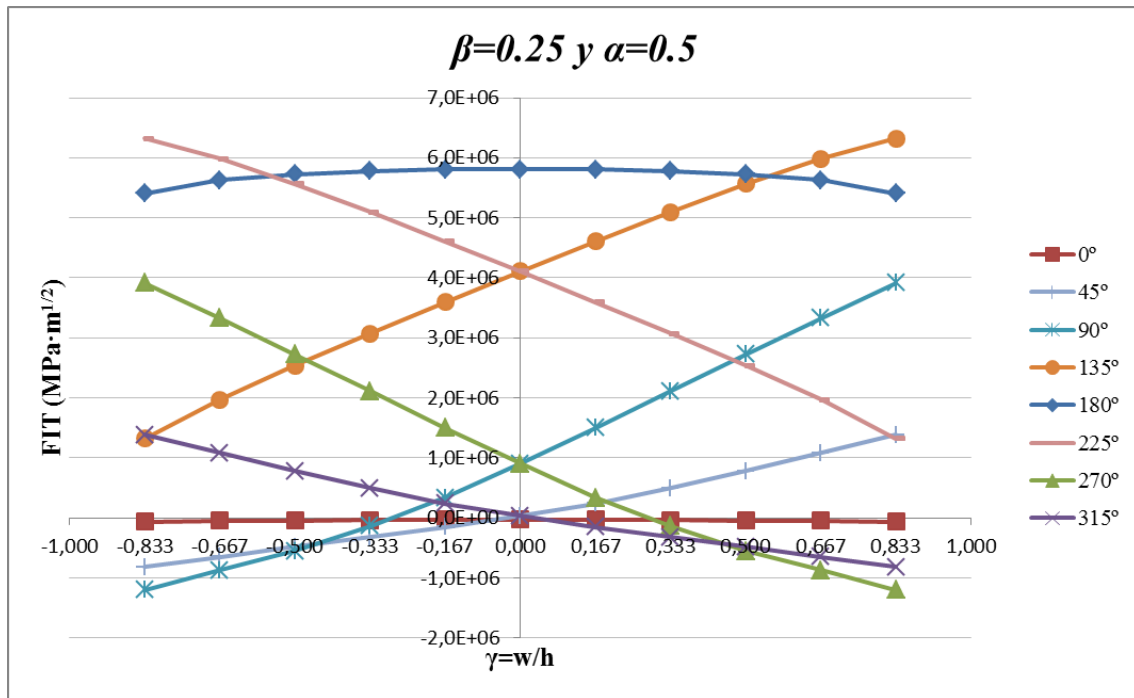


Fig. 5.10. FIT para $\beta=0.25$ y $\alpha=0.5$ a lo largo de un giro completo.

En esta última profundidad $\alpha=0.5$, la mayor de todas (el centro de la fisura llega al centro del eje), es donde se alcanzan los valores más altos del FIT para las fisuras con factor de forma $\beta=0.25$.

A continuación se muestran los resultados obtenidos para las fisuras con factor de forma $\beta=0.50$.

• **Fisura con factor de forma $\beta=0.50$ y profundidad $\alpha=0.1$:**

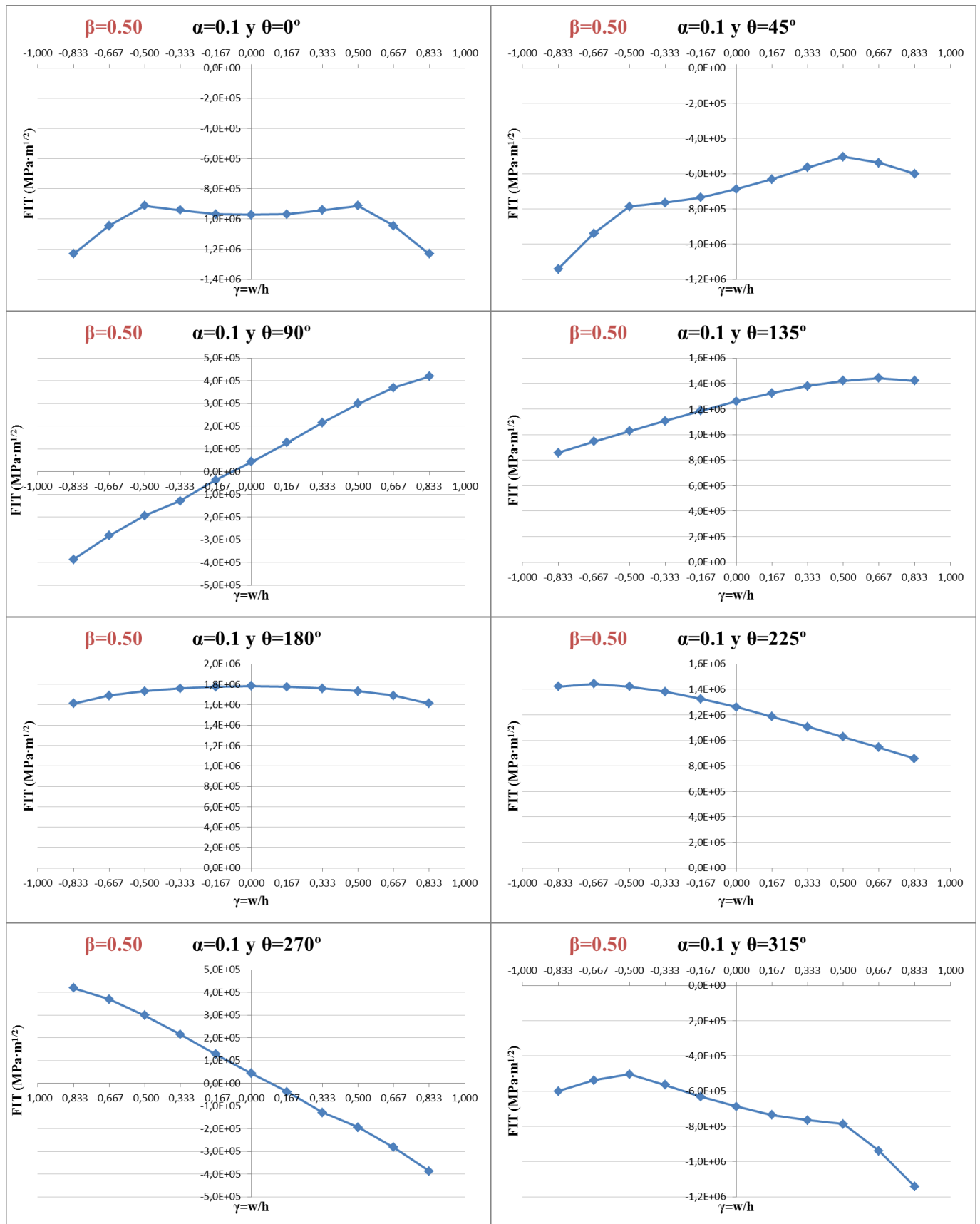


Fig. 5.11. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.1$ para las ocho posiciones angulares.

Si se comparan los valores del FIT obtenidos para el factor de forma $\beta=0.50$ y profundidad $\alpha=0.1$, con los que se obtuvieron para $\beta=0.25$ y la misma profundidad, se observa que el proceso de apertura y cerrado de la grieta es prácticamente igual pero alcanzando valores menores del FIT en casi todos los puntos de la fisura (Fig. 5.12).

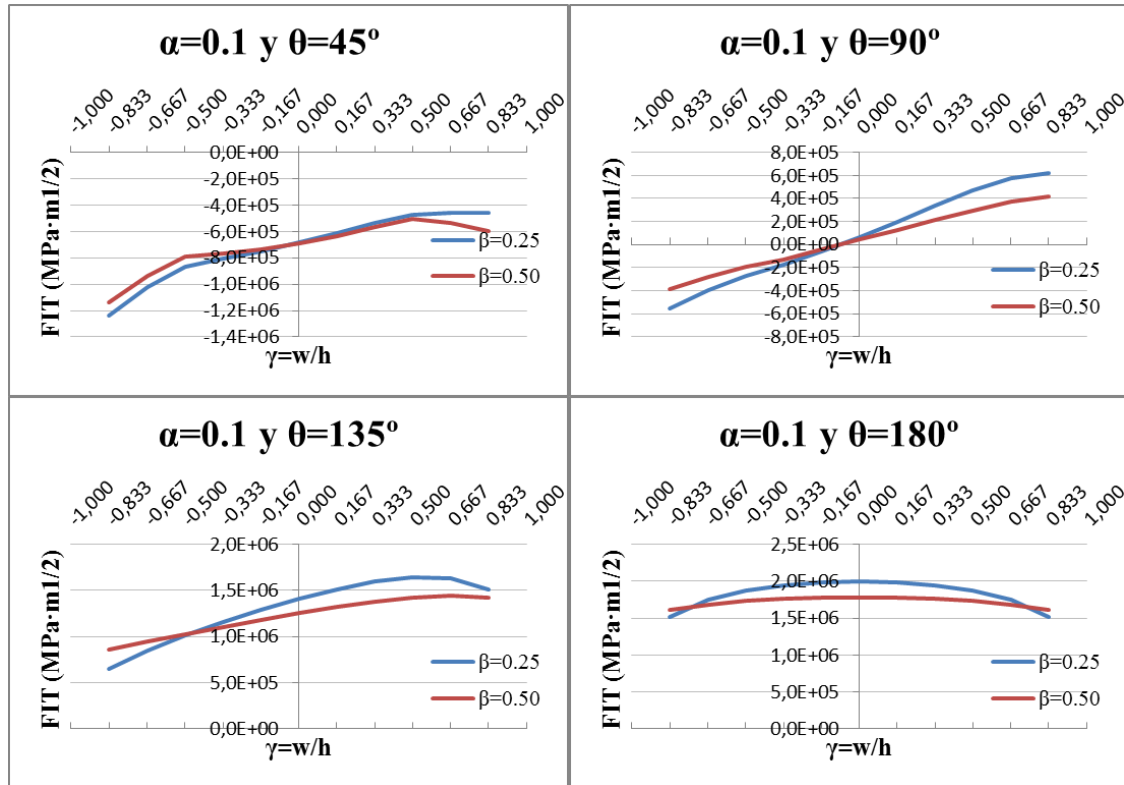


Fig. 5.12. Comparación del FIT de $\beta=0.25$ y $\beta=0.50$ para $\alpha=0.1$ en el proceso de apertura.

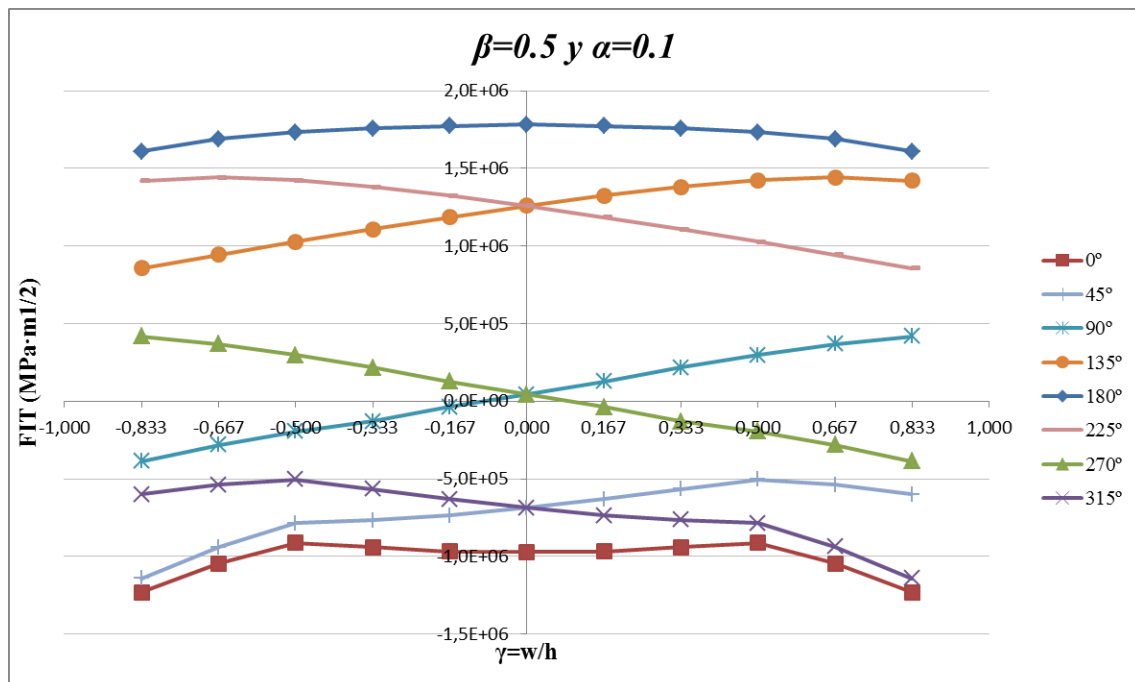


Fig. 5.13. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.1$ a lo largo de un giro completo.

• **Fisura con factor de forma $\beta=0.50$ y profundidad $\alpha=0.2$:**

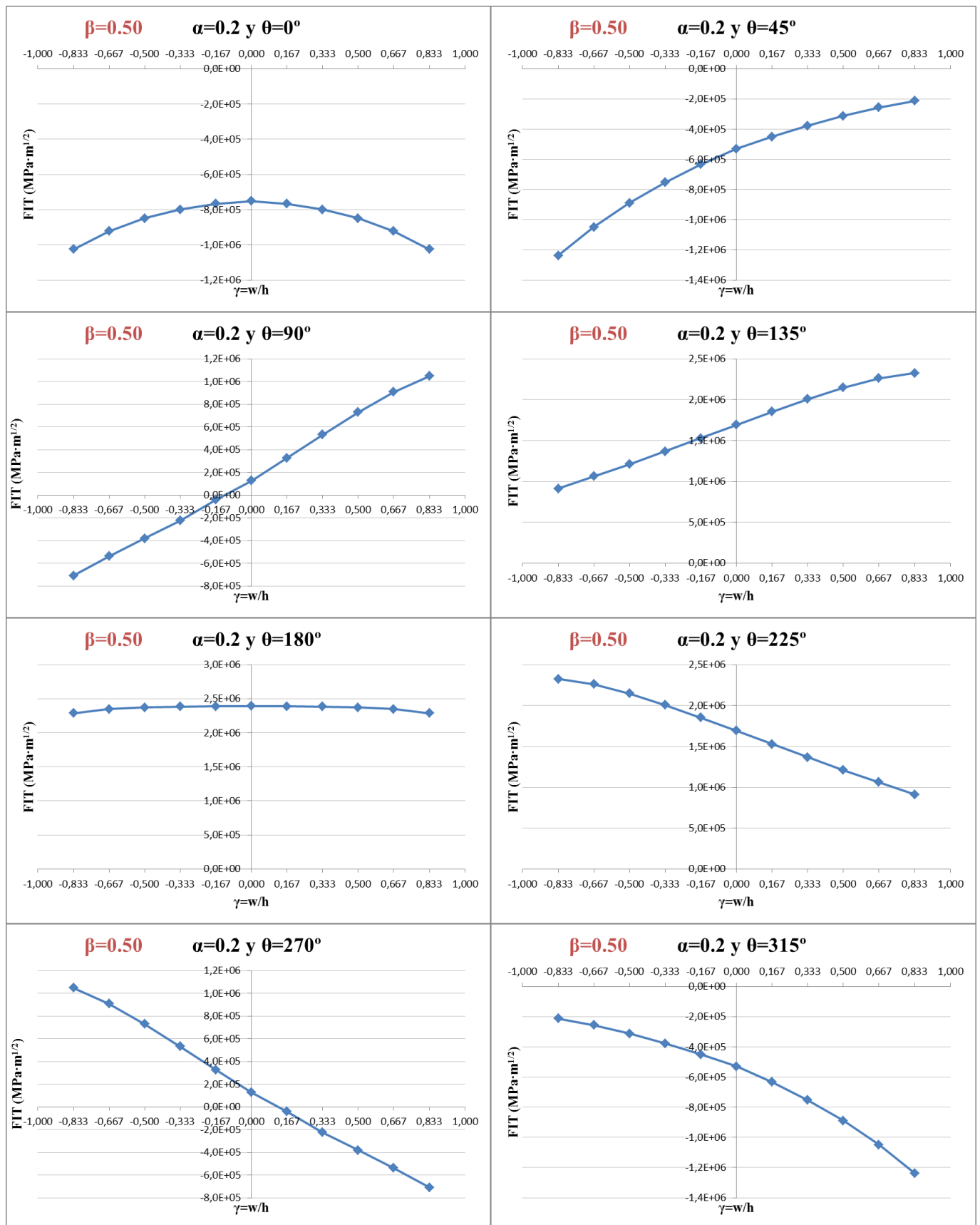


Fig. 5.14. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.2$ para las ocho posiciones angulares.

Al aumentar la profundidad en las fisuras con factor de forma $\beta=0.50$ se sigue la misma tendencia que en las de $\beta=0.25$. Se alcanzan valores mayores del FIT con respecto a la profundidad de $\alpha=0.1$, la fisura se encuentra más próxima a abrirse en la posición angular de 45° , y se va incrementando el FIT en los extremos en las posiciones angulares $\theta=135^\circ$ y $\theta=225^\circ$ (Fig. 5.15).

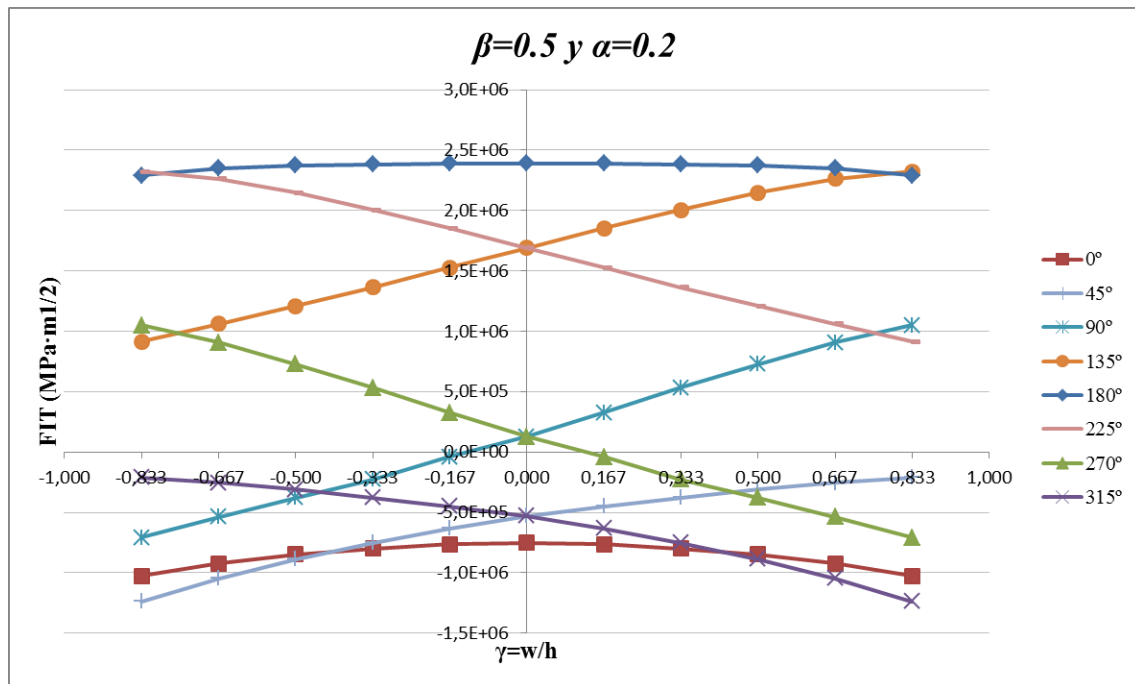


Fig. 5.15. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.2$ a lo largo de un giro completo.

• **Fisura con factor de forma $\beta=0.50$ y profundidad $\alpha=0.3$:**

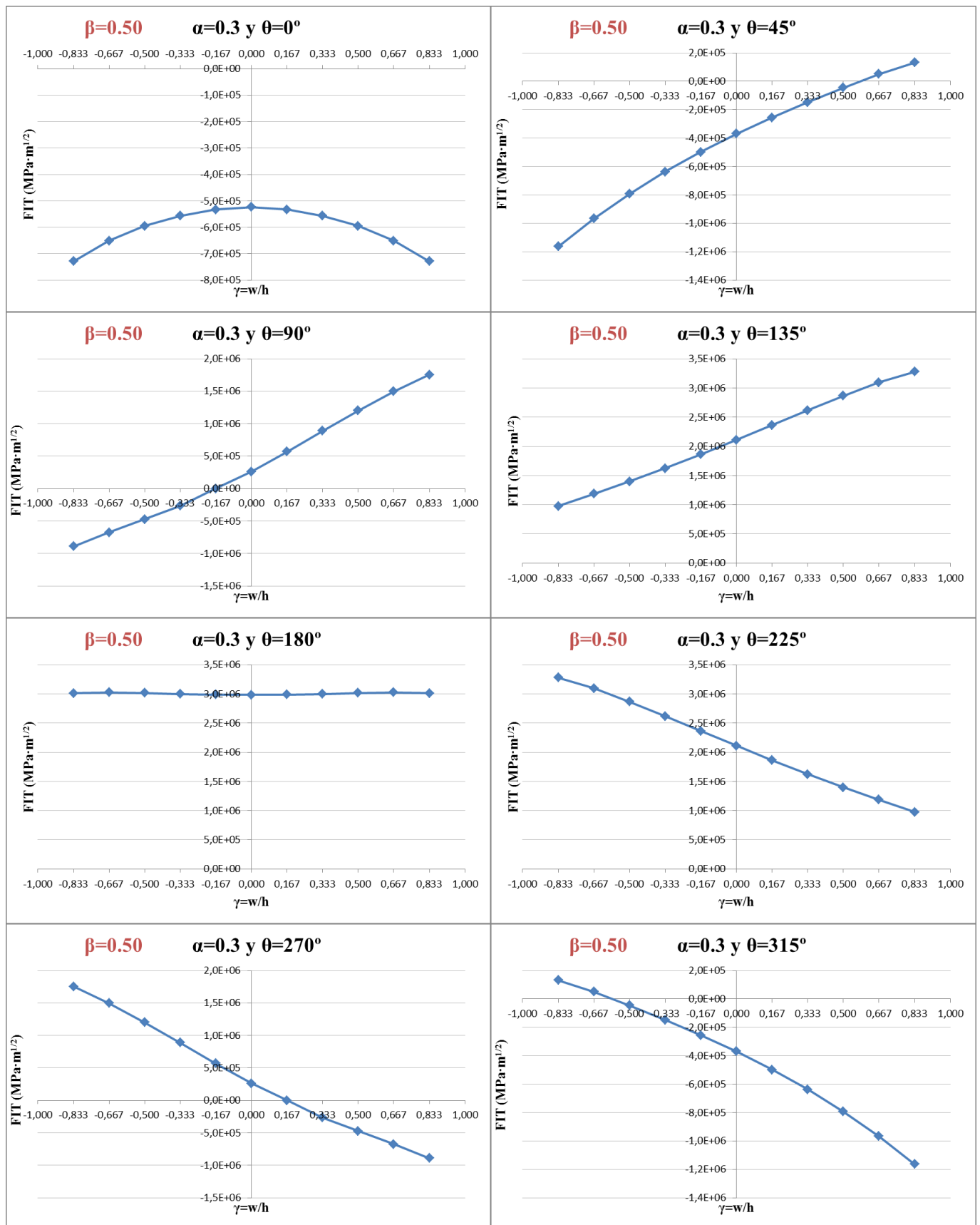


Fig. 5.16. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.3$ para las ocho posiciones angulares.

La tendencia marcada por el aumento de profundidad se sigue cumpliendo aunque, a pesar de seguir aumentando la apertura de la fisura en la posición angular de 45° , ahora el FIT es considerablemente menor con respecto a la fisura de factor de forma $\beta=0.25$ y la misma profundidad $\alpha=0.3$. Claramente en la posición angular de 90° la fisura de $\beta=0.25$ está más abierta que la de $\beta=0.50$ (Fig. 5.17).

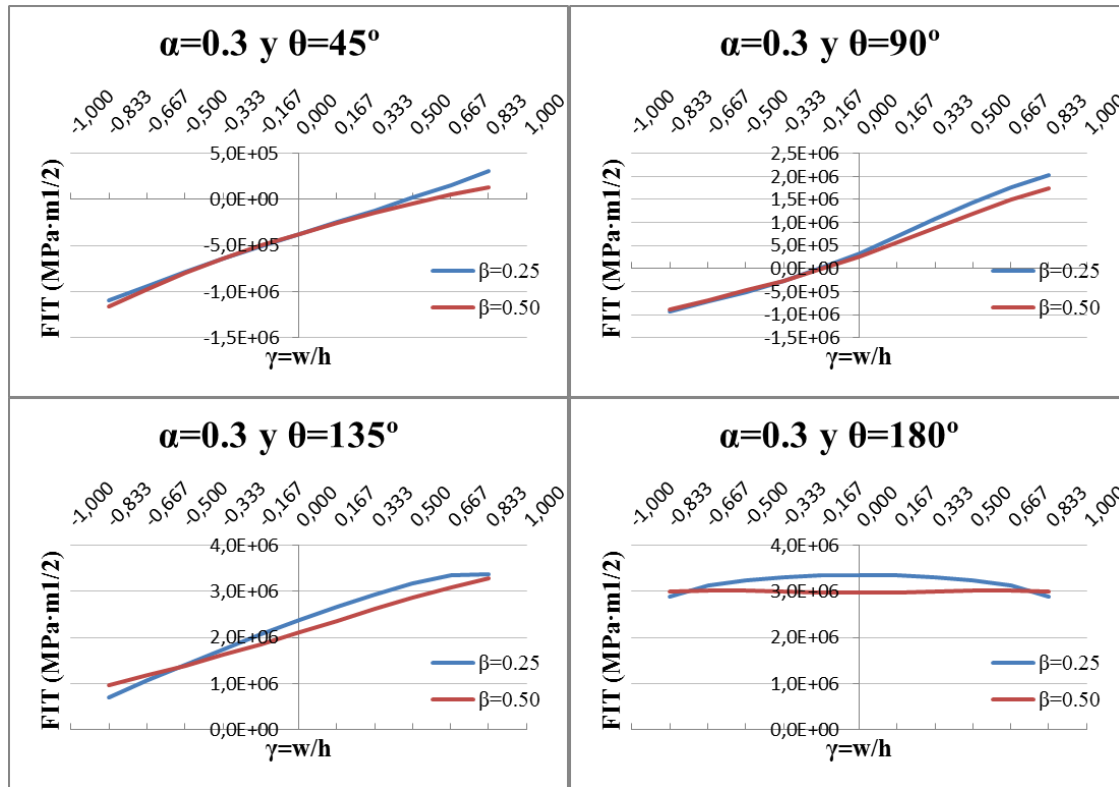


Fig. 5.17. Comparación del FIT de $\beta=0.25$ y $\beta=0.50$ para $\alpha=0.3$ en el proceso de apertura.

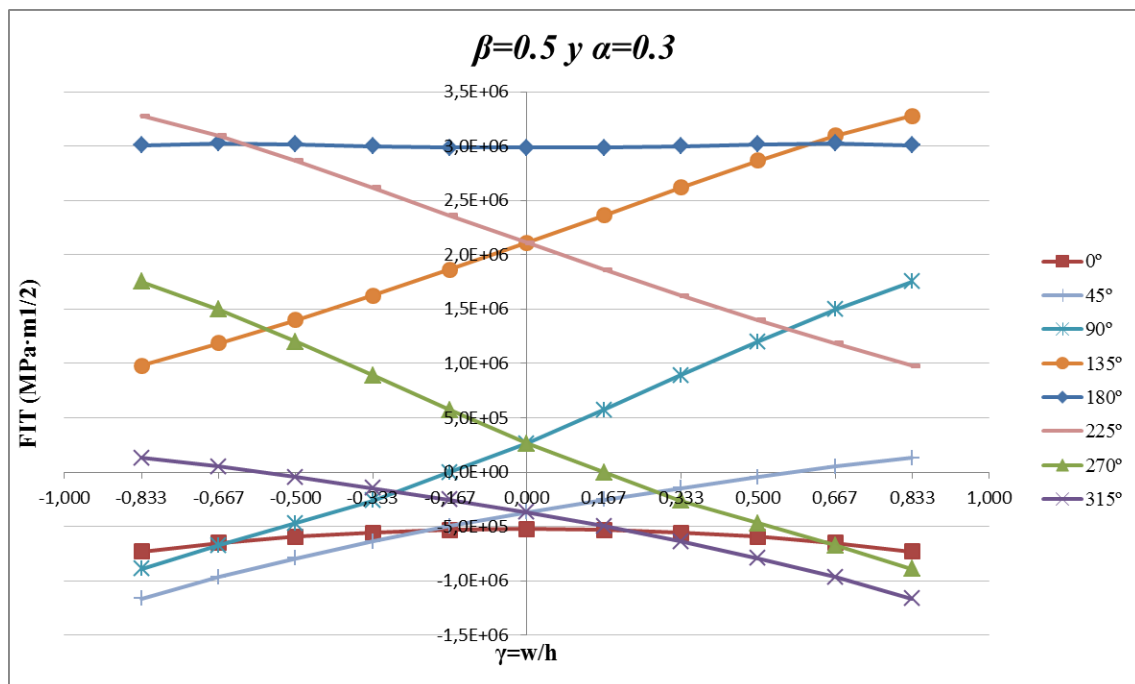


Fig. 5.18. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.3$ a lo largo de un giro completo.

• **Fisura con factor de forma $\beta=0.50$ y profundidad $\alpha=0.4$:**

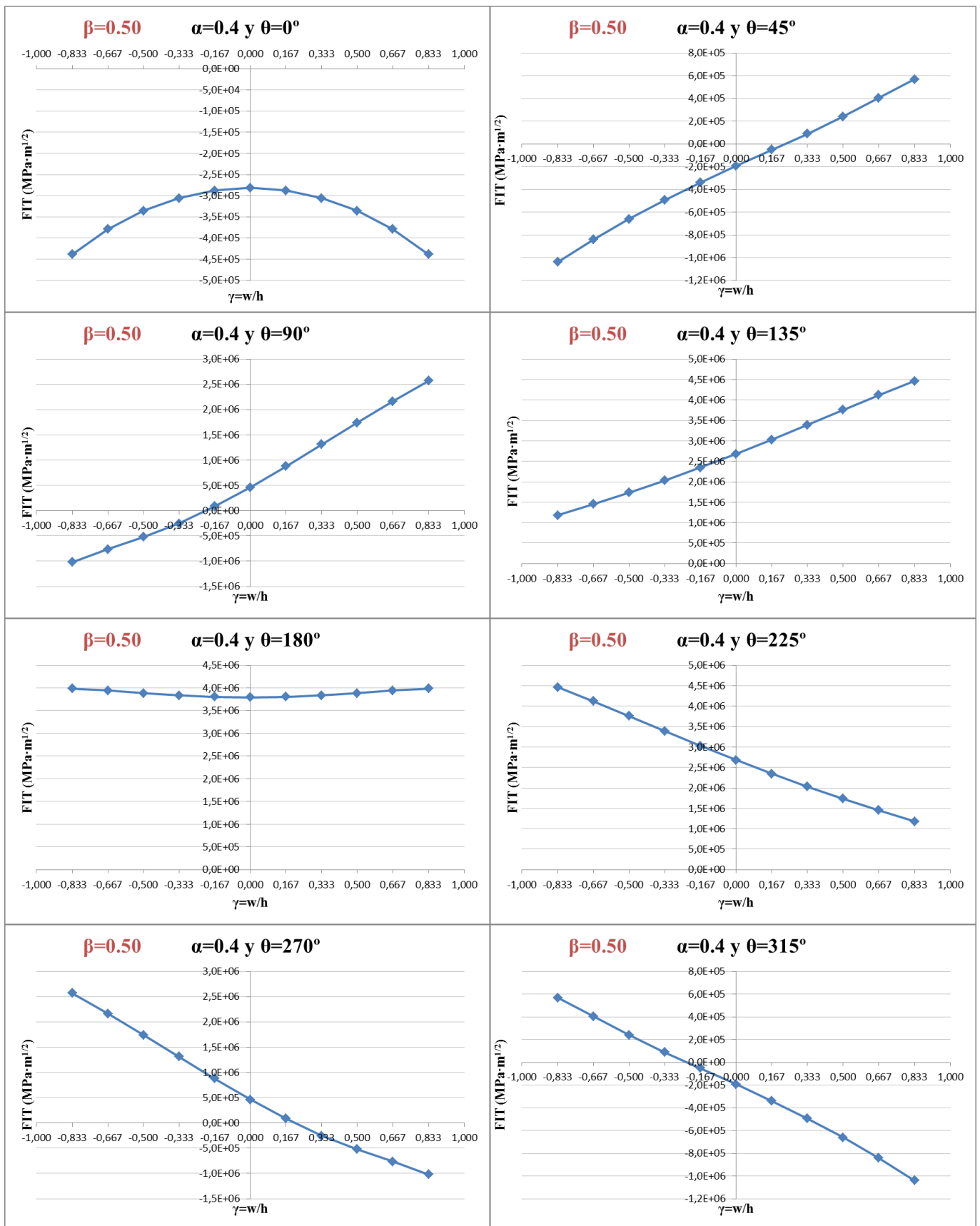


Fig. 5.19. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.4$ para las ocho posiciones angulares.

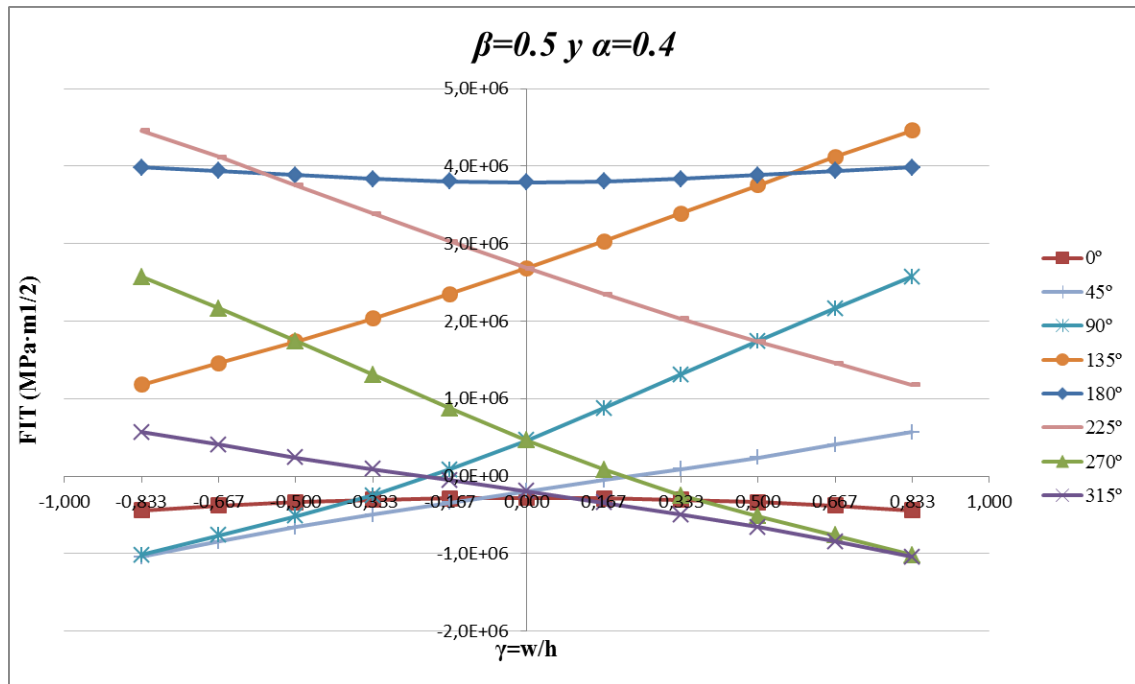


Fig. 5.20. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.4$ a lo largo de un giro completo.

Nótese que hasta ahora en la posición de 180°, que es la de máxima apertura, se obtenían curvas del FIT con forma cóncava, alcanzándose los valores más altos en la parte central. Sin embargo, ya en el caso anterior ($\beta=0.50$ y $\alpha=0.3$) para la posición angular de 180°, la curva estaba dejando de ser cóncava y ahora para la profundidad $\alpha=0.4$, tiene forma convexa y sus valores máximos se encuentran en los extremos.

• **Fisura con factor de forma $\beta=0.50$ y profundidad $\alpha=0.5$:**

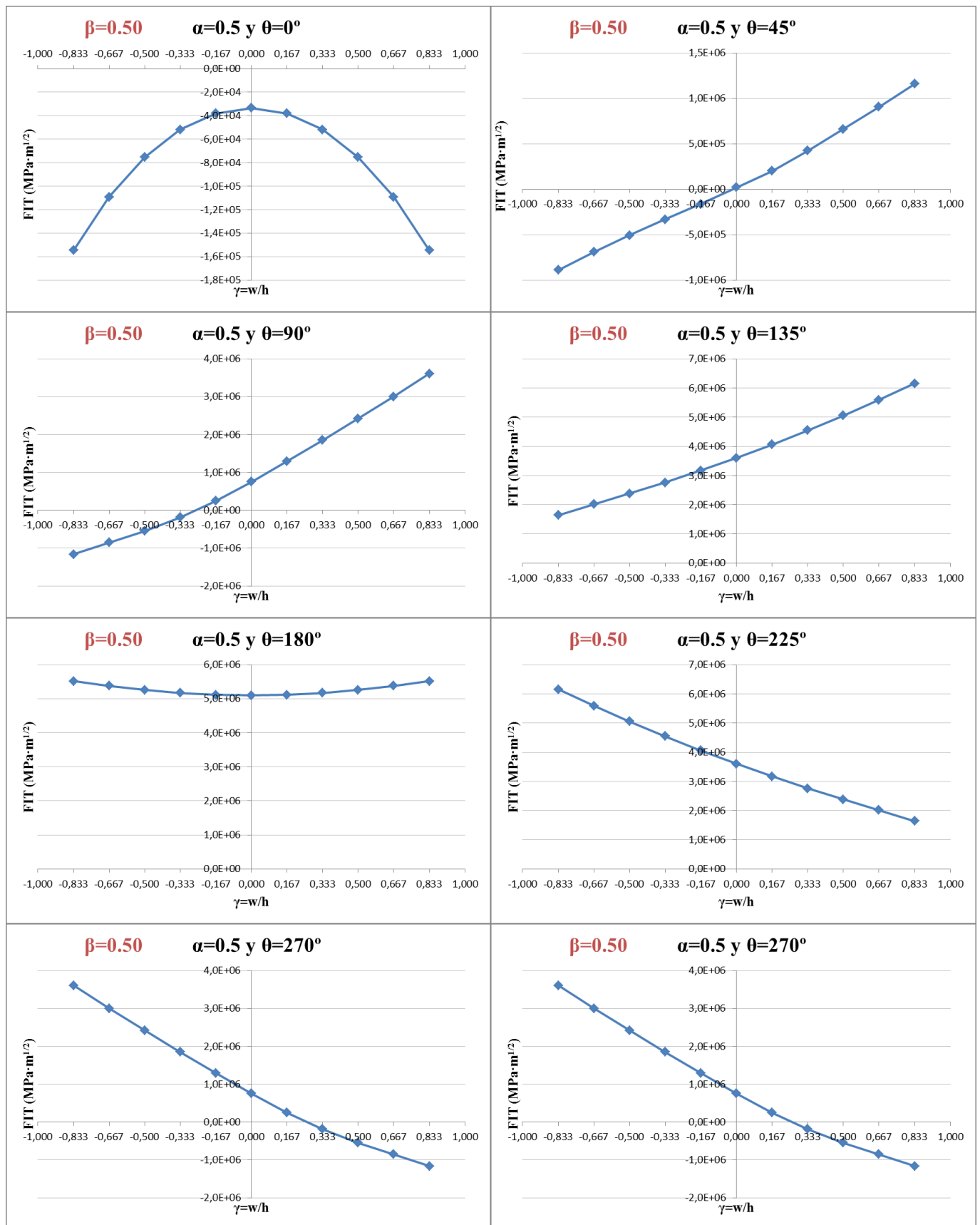


Fig. 5.21. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.5$ para las ocho posiciones angulares.

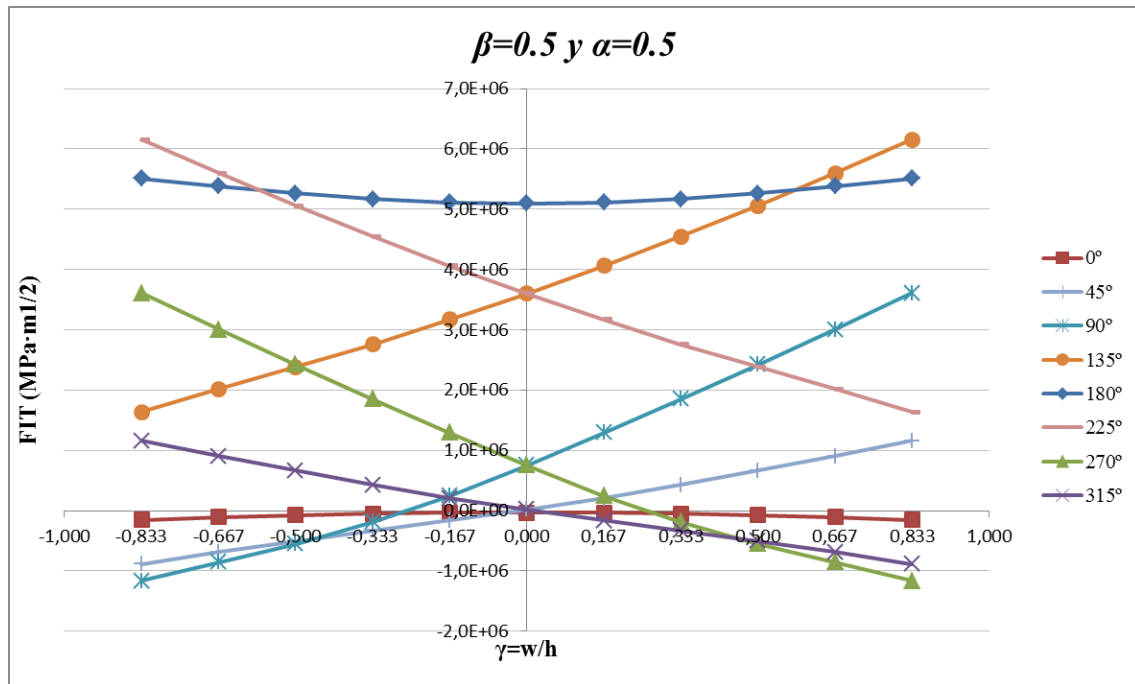


Fig. 5.22. FIT para $\beta=0.50$ y $\alpha=0.5$ a lo largo de un giro completo.

Aquí finaliza el estudio para las fisuras con factor de forma $\beta=0.50$.

• **Fisura con factor de forma $\beta=0.75$ y profundidad $\alpha=0.1$:**

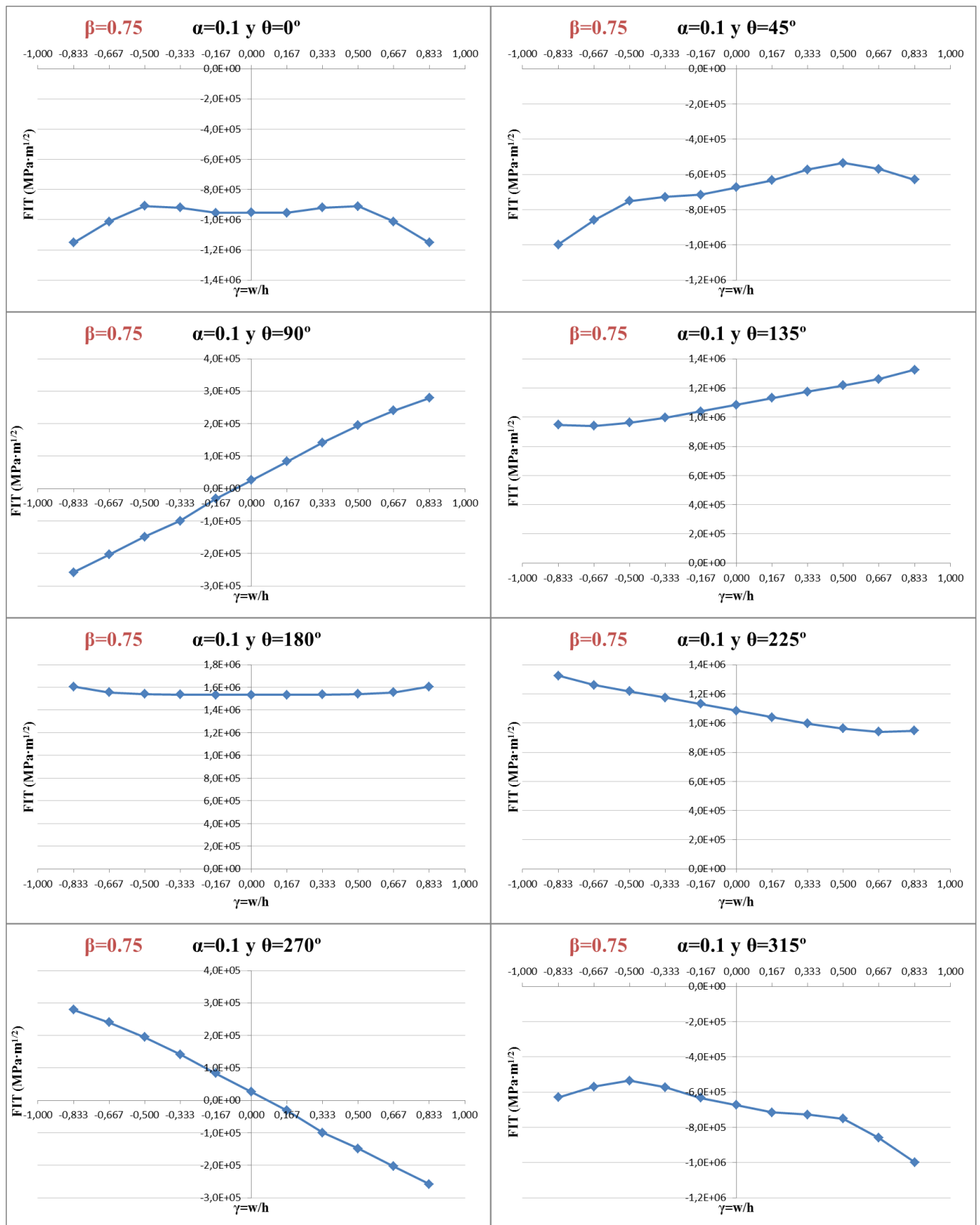


Fig. 5.23. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.1$ para las ocho posiciones angulares.

Al cambiar la fisura a un factor de forma $\beta=0.75$ se acentúan aún más los cambios que ocurrieron para el anterior cambio de factor de forma. Para $\beta=0.75$, ya desde la profundidad $\alpha=0.1$, la curva del FIT para la posición angular de 180° es convexa. Esto significa que los valores del FIT para 180° son en los extremos mayores que en la zona central de la fisura.

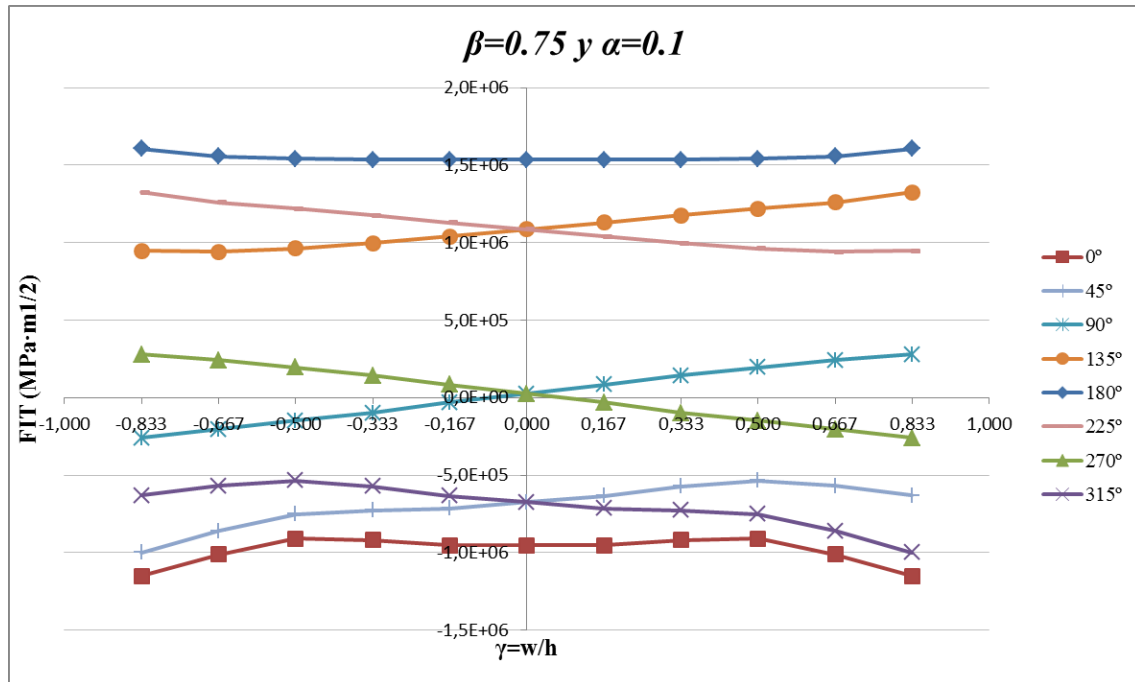


Fig. 5.24. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.1$ a lo largo de un giro completo.

• **Fisura con factor de forma $\beta=0.75$ y profundidad $\alpha=0.2$:**

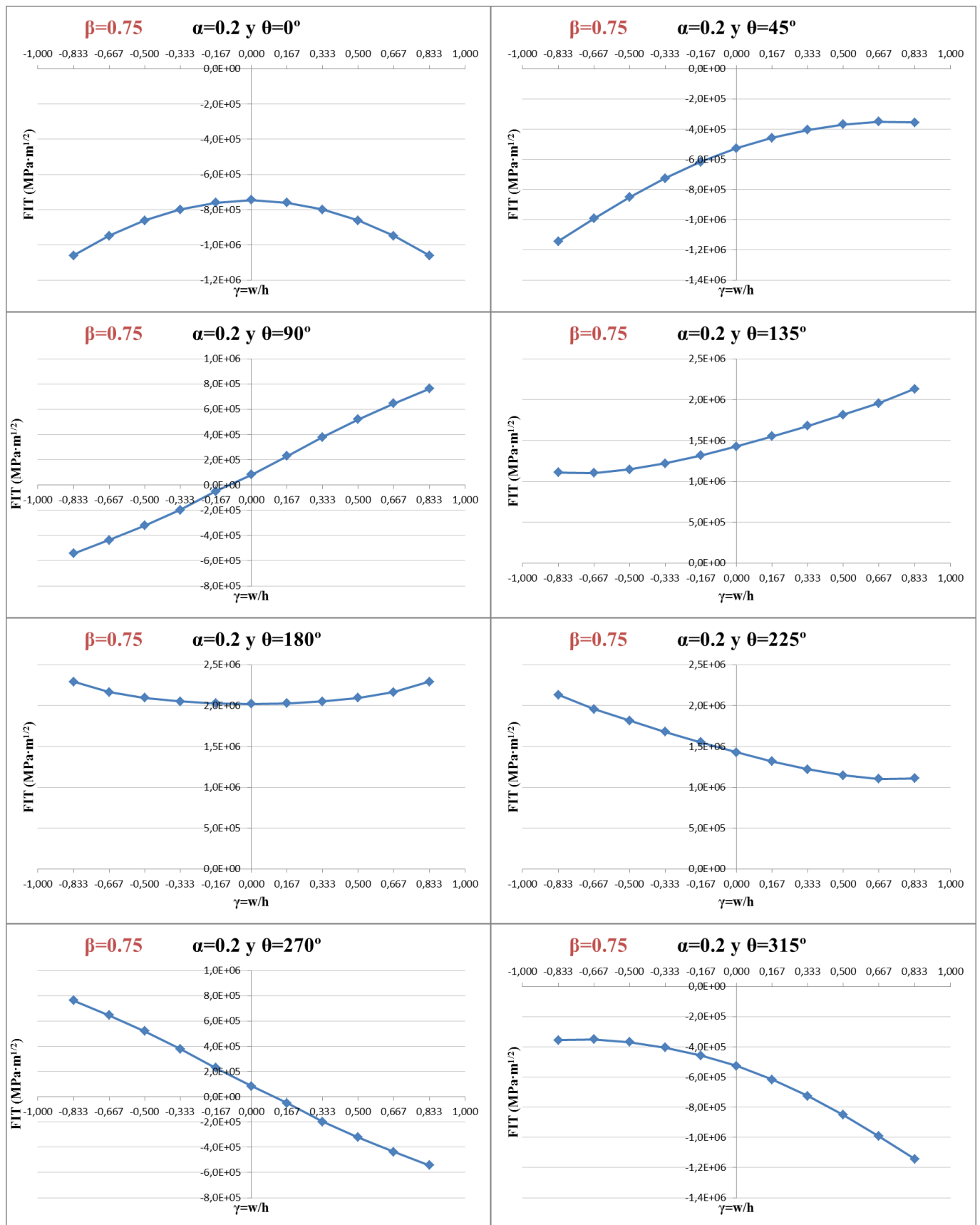


Fig. 5.25. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.2$ para las ocho posiciones angulares.

El aumento de profundidad en esta geometría de $\beta=0.75$ resulta exactamente igual que en las geometrías descritas anteriormente salvo por la convexidad de la curva del FIT para la posición de 180° que determina que el máximo valor alcanzado se encuentra en los extremos y no en el centro de la fisura. Además se puede ver (Fig. 5.26) que en las posiciones angulares de 135° y 225° es más difícil que los valores de los extremos superen a los de la posición de 180° como ocurría para los anteriores factores de forma en la profundidad $\alpha=0.2$ (Fig. 5.4 y Fig. 5.15).

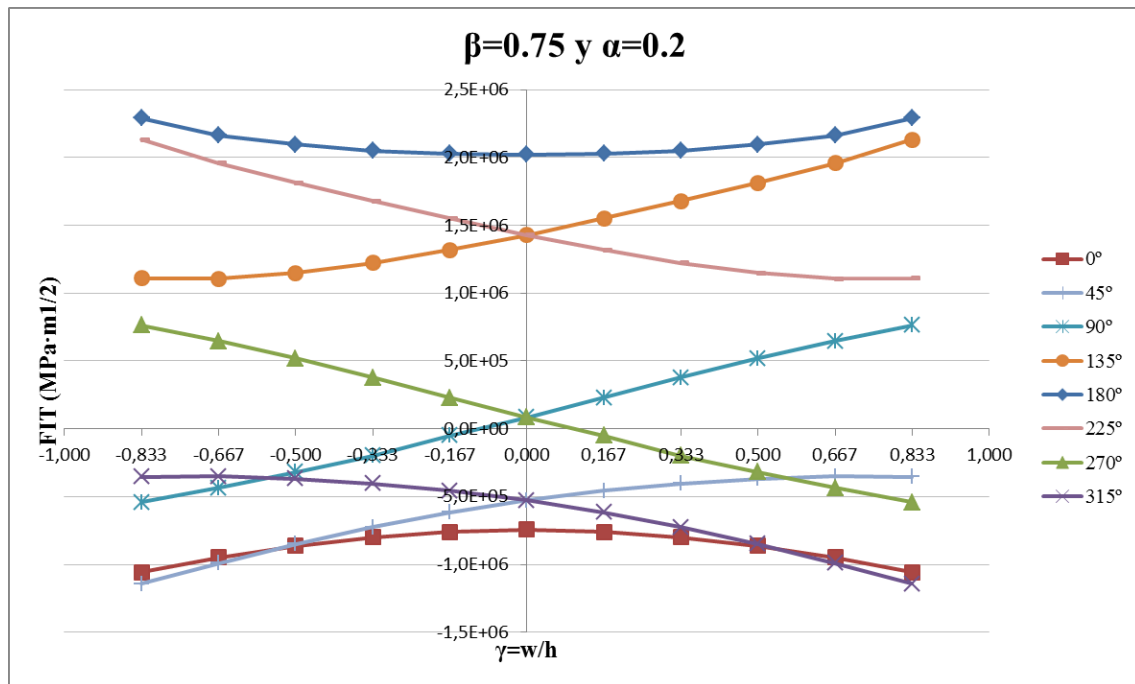


Fig. 5.26. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.2$ a lo largo de un giro completo.

• **Fisura con factor de forma $\beta=0.75$ y profundidad $\alpha=0.3$:**

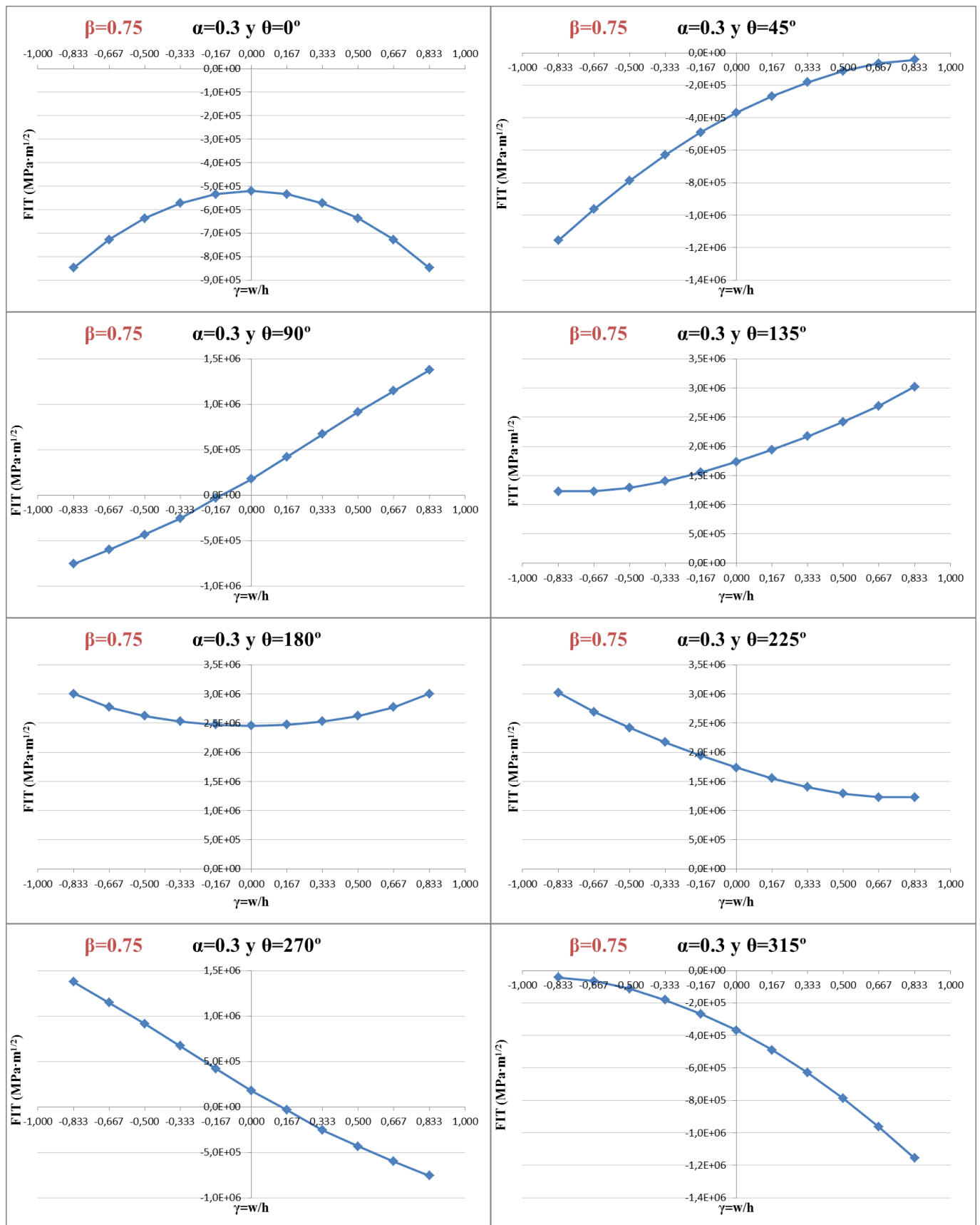


Fig. 5.27. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.3$ para las ocho posiciones angulares.

Para la profundidad de $\alpha=0.3$ ya se aprecia que los valores del FIT en los extremos de la fisura, en las posiciones de 135° y 225° superan ligeramente los alcanzados en la posición angular de 180° .

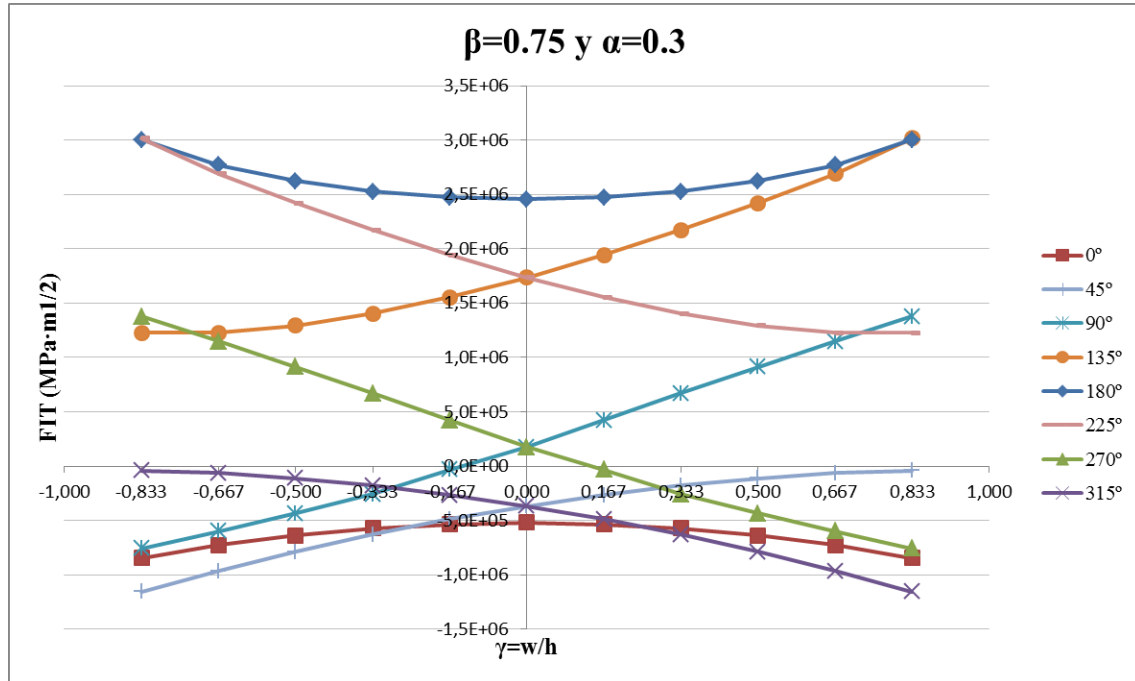


Fig. 5.28. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.3$ a lo largo de un giro completo.

Para las siguientes profundidades $\alpha=0.4$ y $\alpha=0.5$ se sigue cumpliendo la tendencia marcada hasta ahora.

• **Fisura con factor de forma $\beta=0.75$ y profundidad $\alpha=0.4$:**

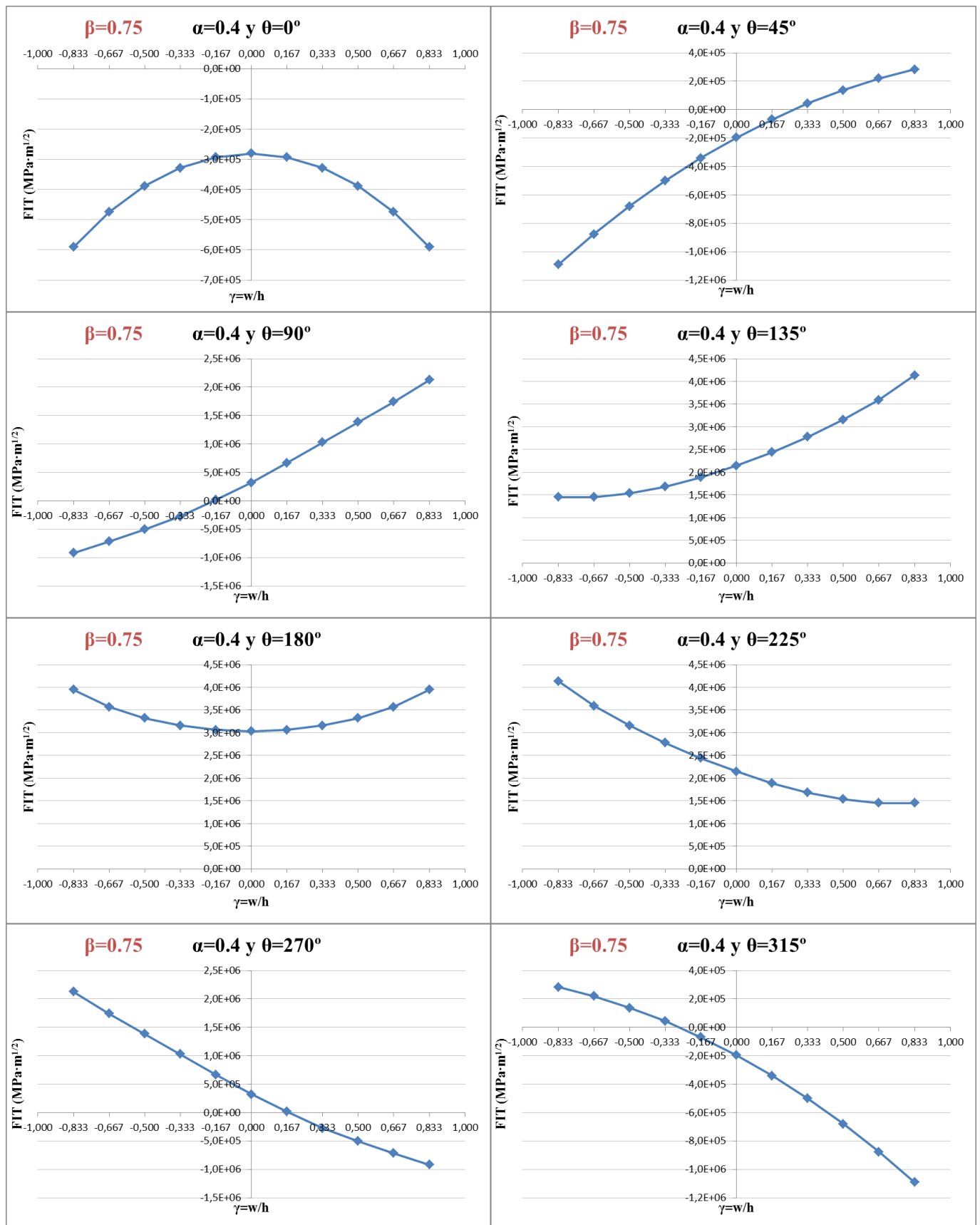


Fig. 5.29. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.4$ para las ocho posiciones angulares.

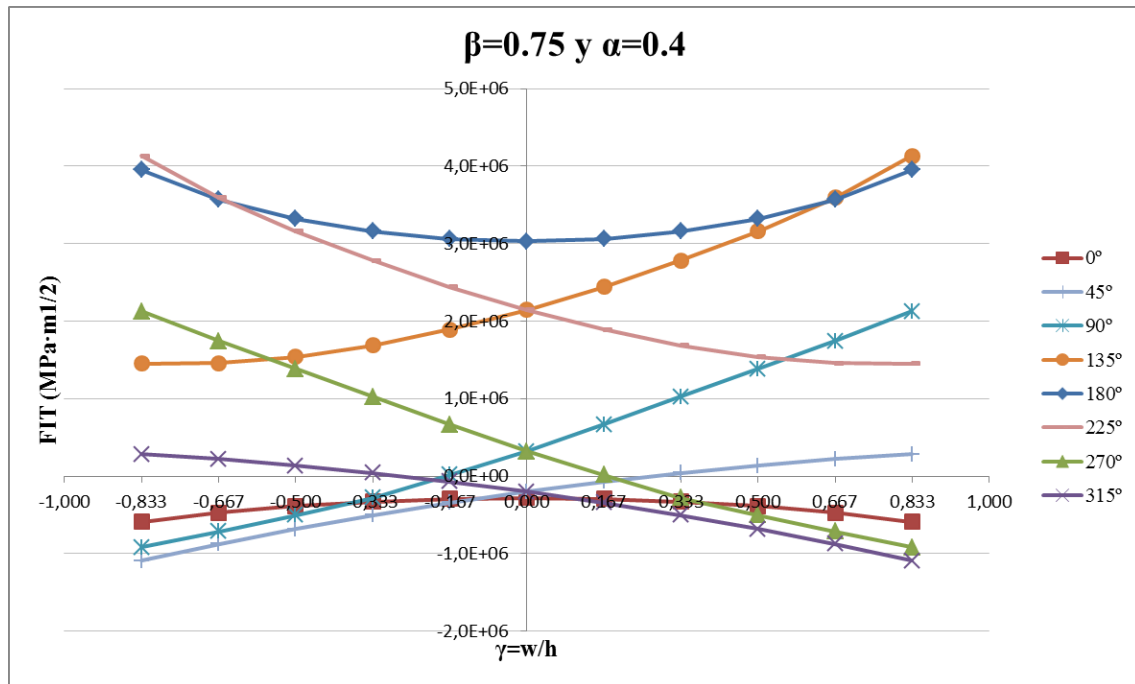


Fig. 5.30. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.4$ a lo largo de un giro completo.

• **Fisura con factor de forma $\beta=0.75$ y profundidad $\alpha=0.5$:**

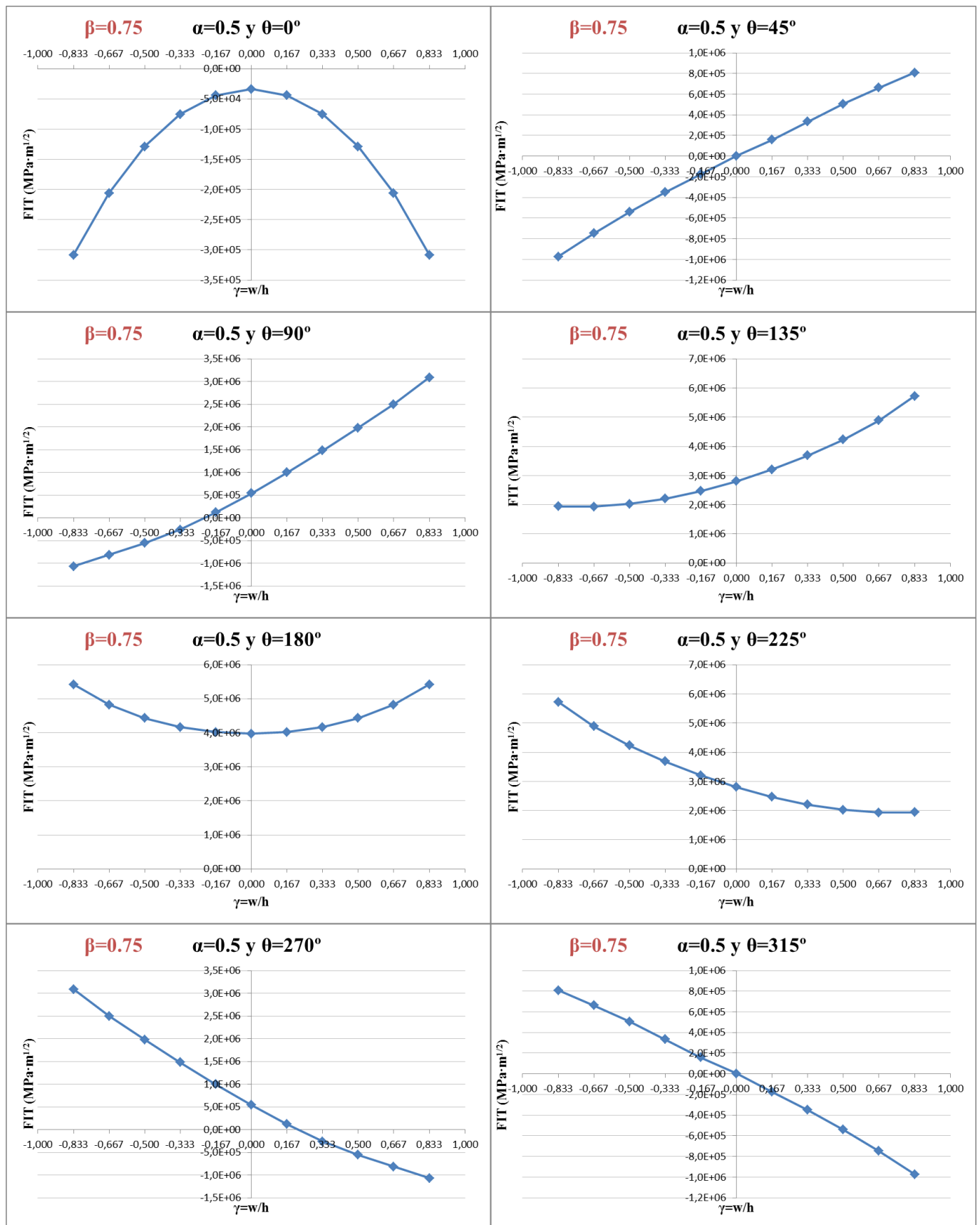


Fig. 5.31. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.5$ para las ocho posiciones angulares.

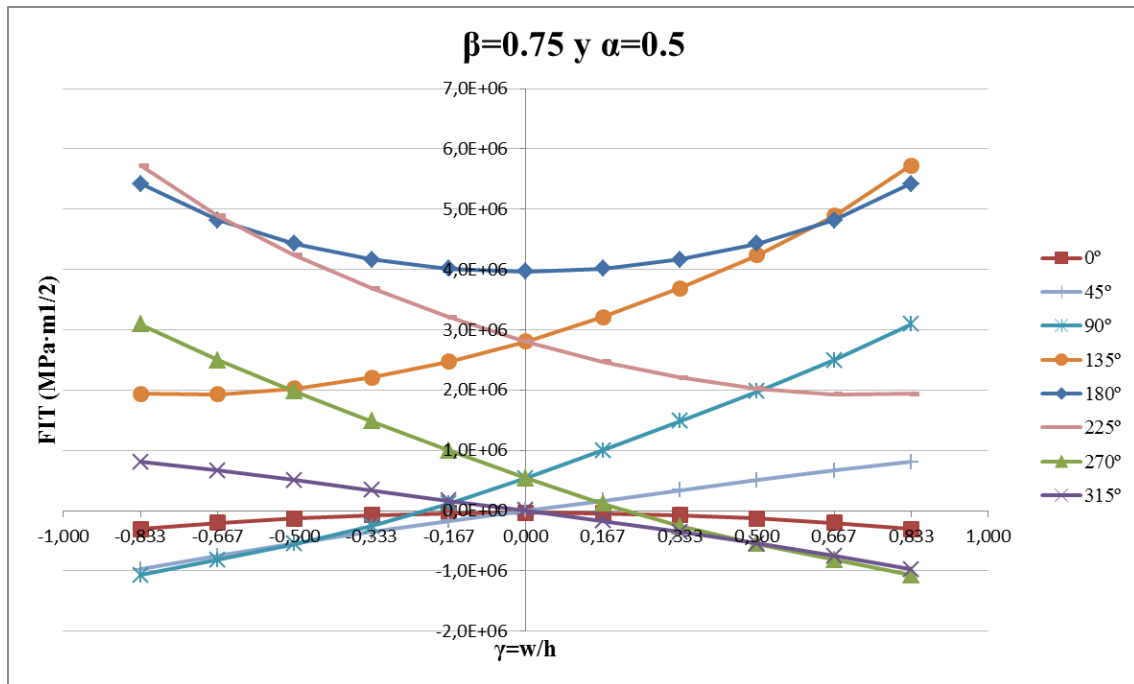


Fig. 5.32. FIT para $\beta=0.75$ y $\alpha=0.5$ a lo largo de un giro completo.

Aquí termina el análisis de fisuras con factor de forma $\beta=0.75$. A continuación la fisura con factor de forma $\beta=1$ correspondiente a un frente de fisura completamente semicircular. Será el último de este estudio.

• **Fisura con factor de forma $\beta=1.00$ y profundidad $\alpha=0.1$:**

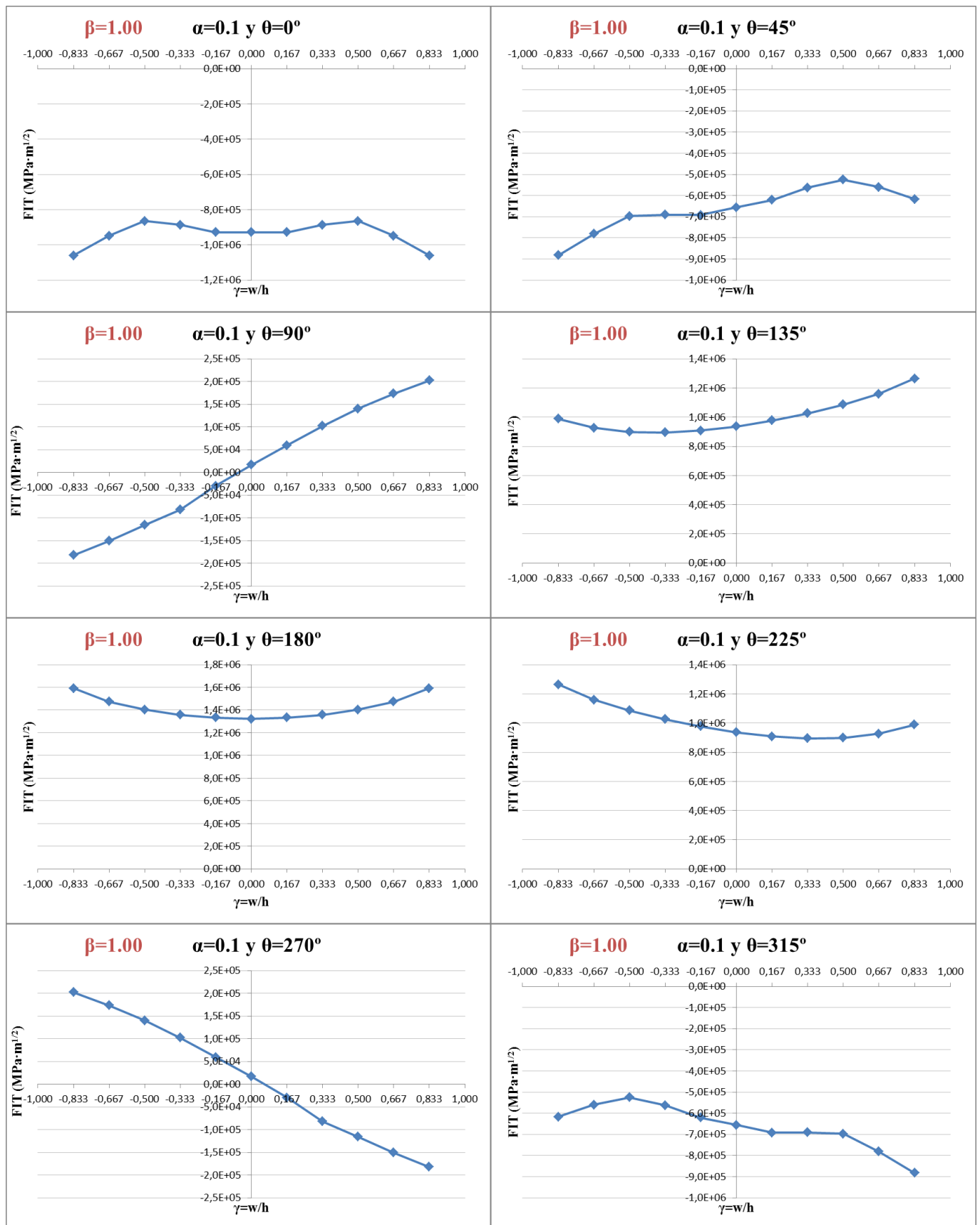


Fig. 5.33. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.1$ para las ocho posiciones angulares.

Se observa una vez más que para la profundidad de $\alpha=0.1$ el proceso de apertura y cerrado de la fisura es muy similar (Fig. 5.34). Por lo tanto se puede concluir que cuanto menor sea la profundidad menos influye el factor de forma β en este aspecto.

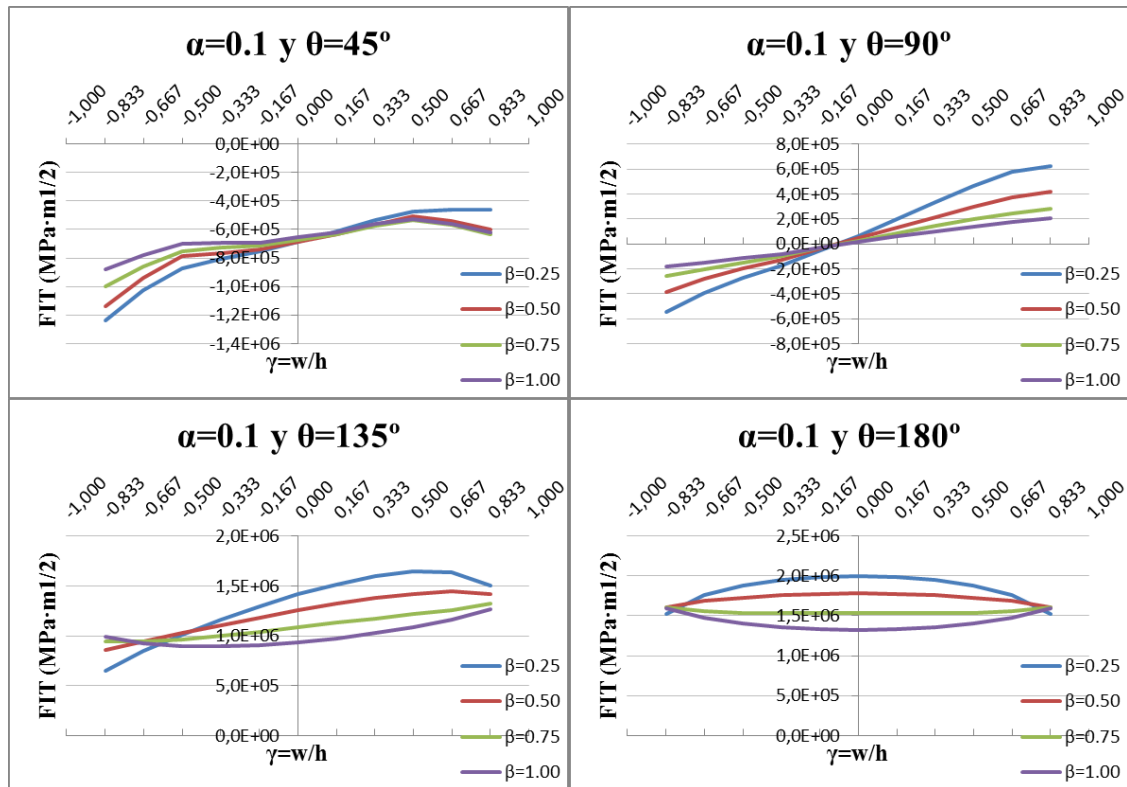


Fig. 5.34. Comparación del FIT de $\beta=0.25$, $\beta=0.5$, $\beta=0.75$ y $\beta=1$ para $\alpha=0.1$ en el proceso de apertura.

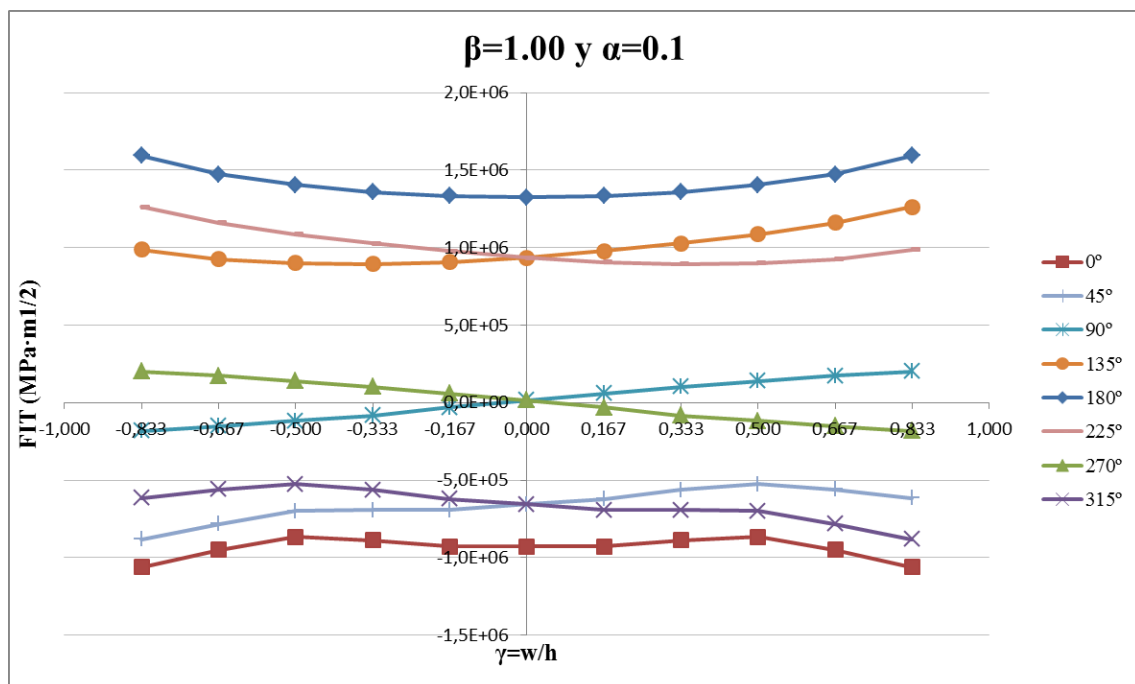


Fig. 5.35. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.1$ a lo largo de un giro completo.

• **Fisura con factor de forma $\beta=1.00$ y profundidad $\alpha=0.2$:**

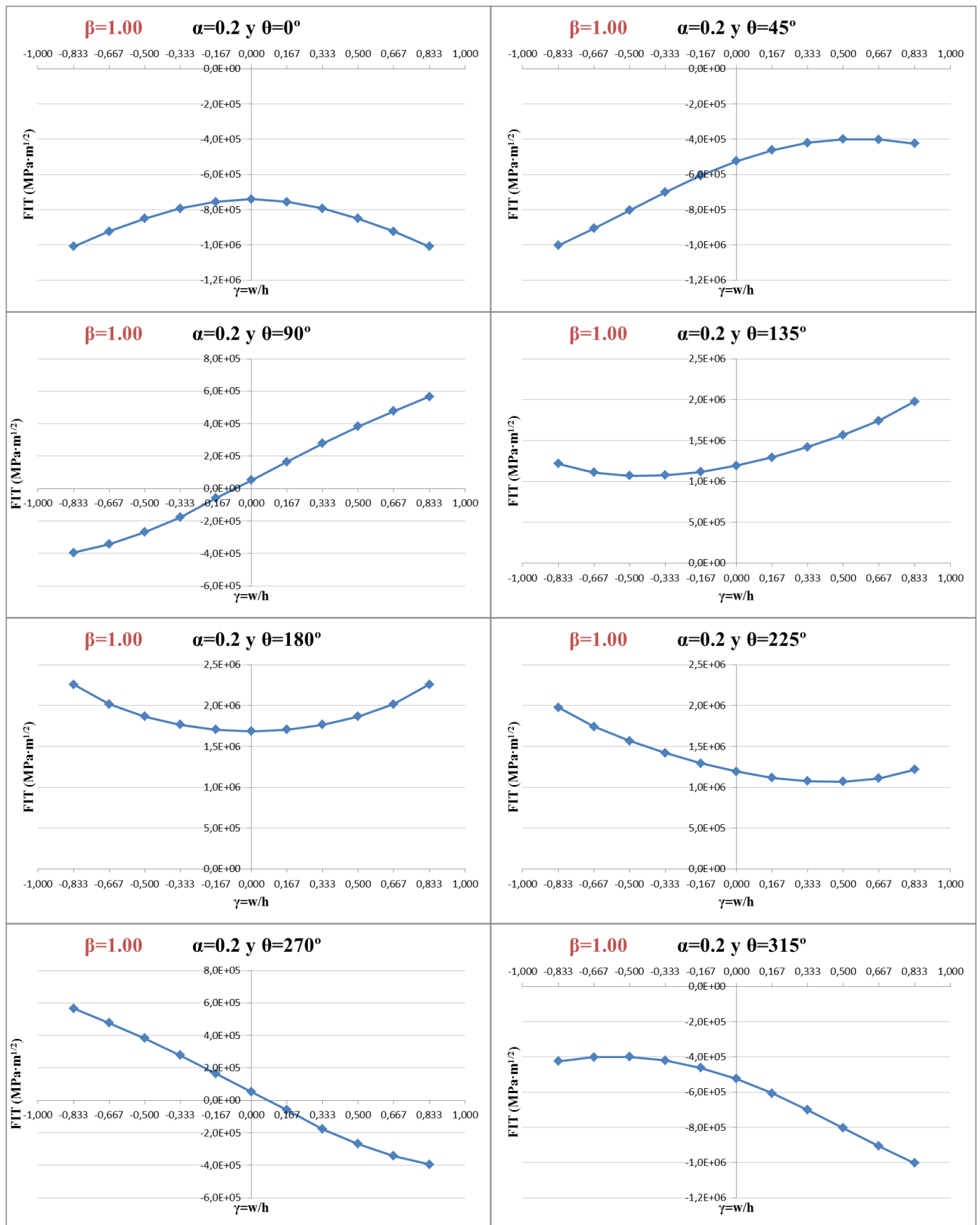


Fig. 5.36. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.2$ para las ocho posiciones angulares.

En este caso de fisura semicircular no se aprecia ningún cambio en la evolución del FIT. Sigue incrementándose y aumenta la apertura para una misma posición angular, conforme la fisura adquiere mayor profundidad.

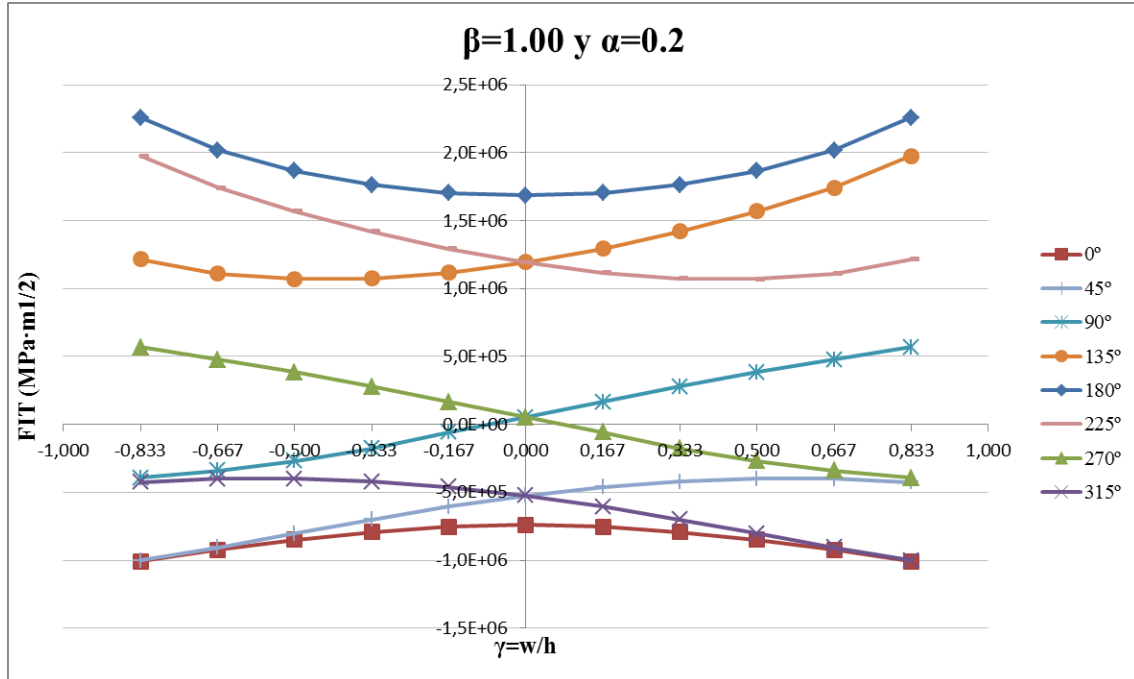


Fig. 5.37. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.2$ a lo largo de un giro completo.

• **Fisura con factor de forma $\beta=1.00$ y profundidad $\alpha=0.3$:**

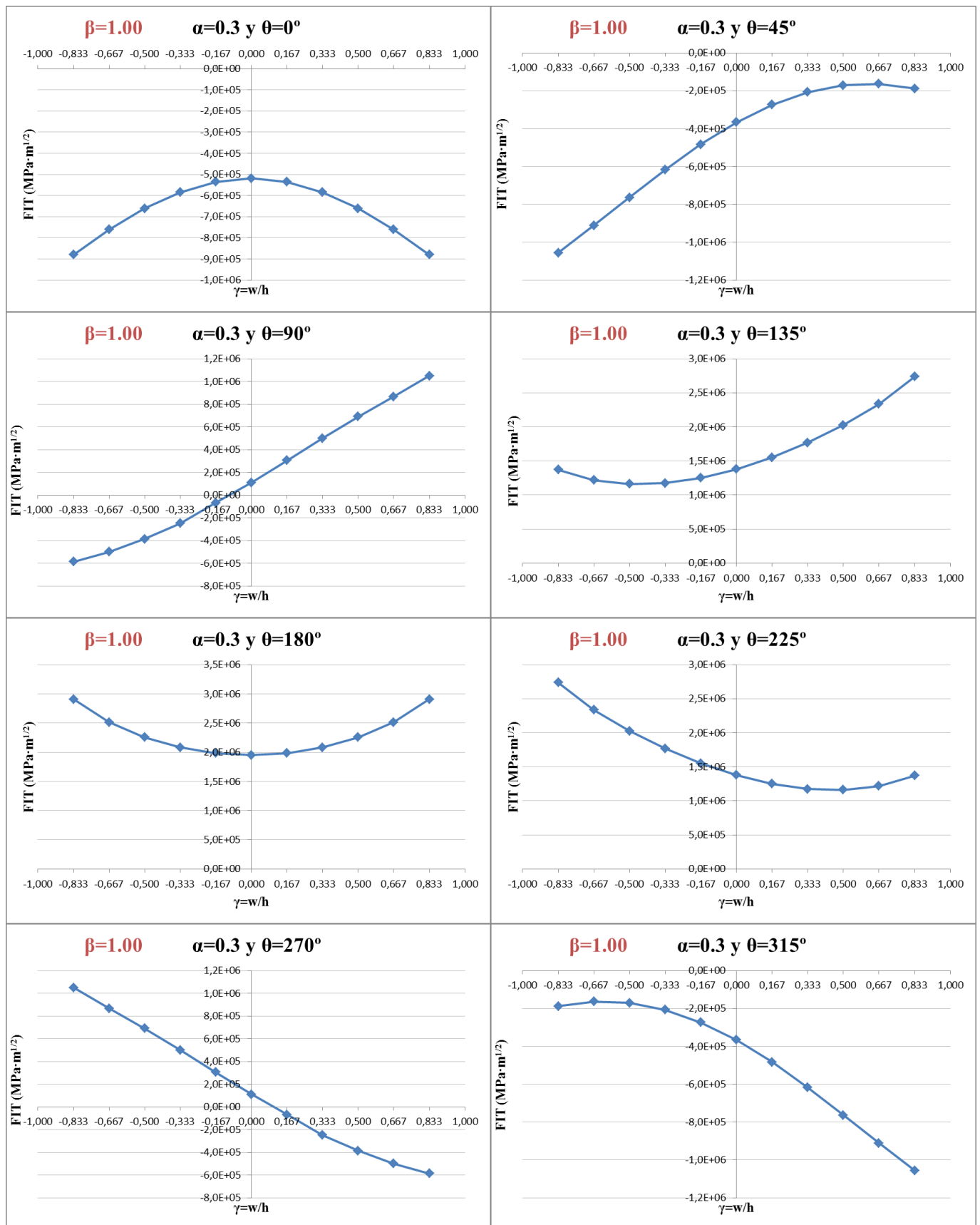


Fig. 5.38. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.3$ para las ocho posiciones angulares.

Debido que la convexidad de la curva del FIT para la posición angular de 180° es mayor que en el factor de forma anterior $\beta=0.75$ se requerirá aún más profundidad para que los valores del FIT en los extremos en las posiciones de 135° y 225° superen a los de la posición angular de 180° .

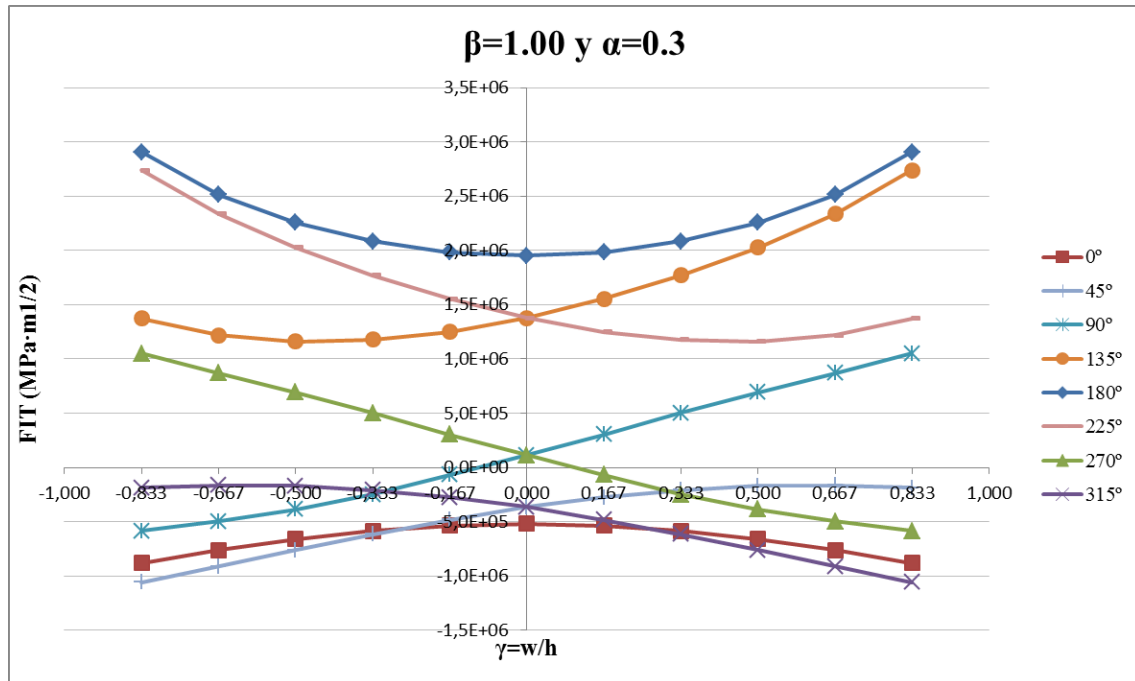


Fig. 5.39. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.3$ a lo largo de un giro completo.

• **Fisura con factor de forma $\beta=1.00$ y profundidad $\alpha=0.4$:**

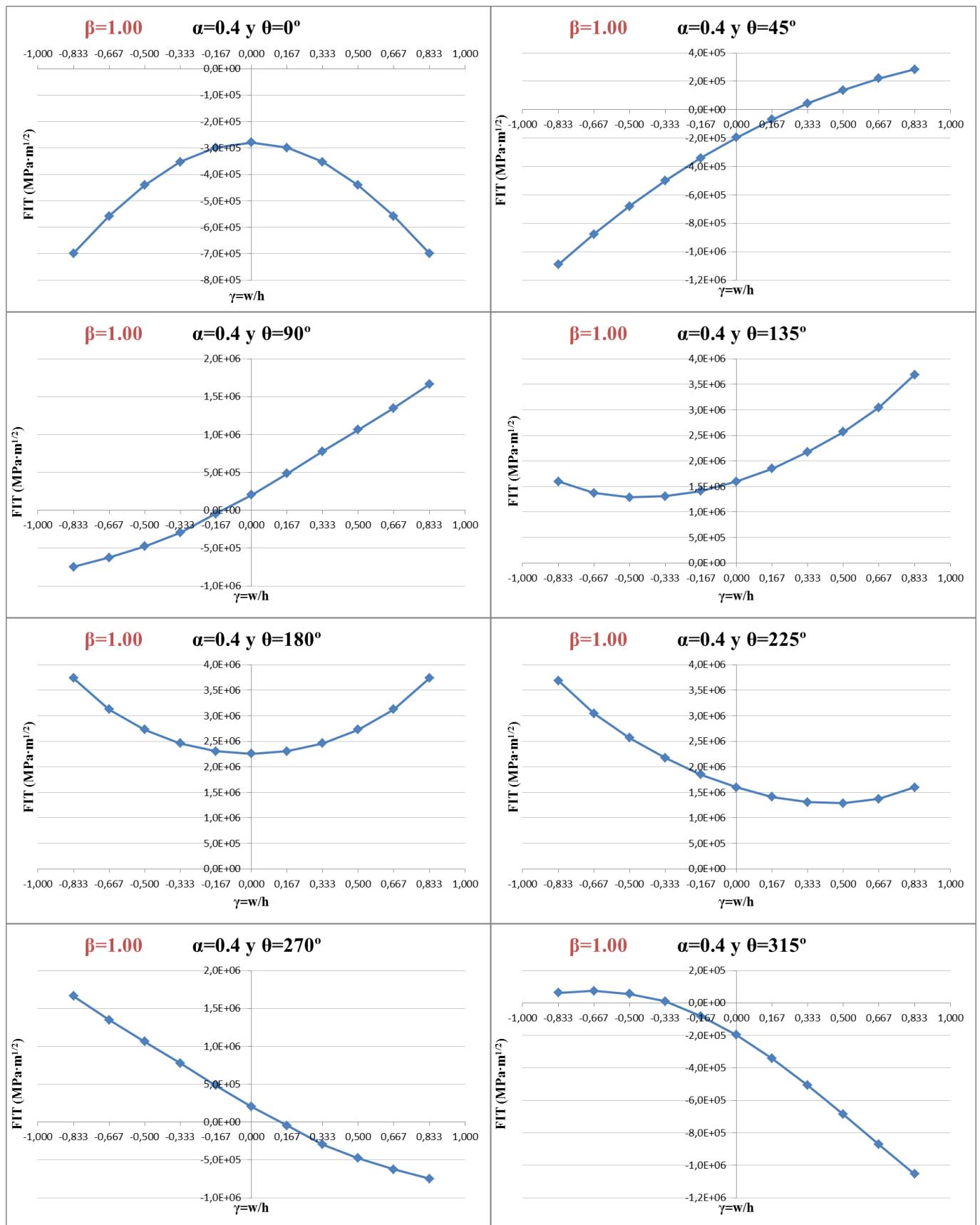


Fig. 5.40. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.4$ para las ocho posiciones angulares.

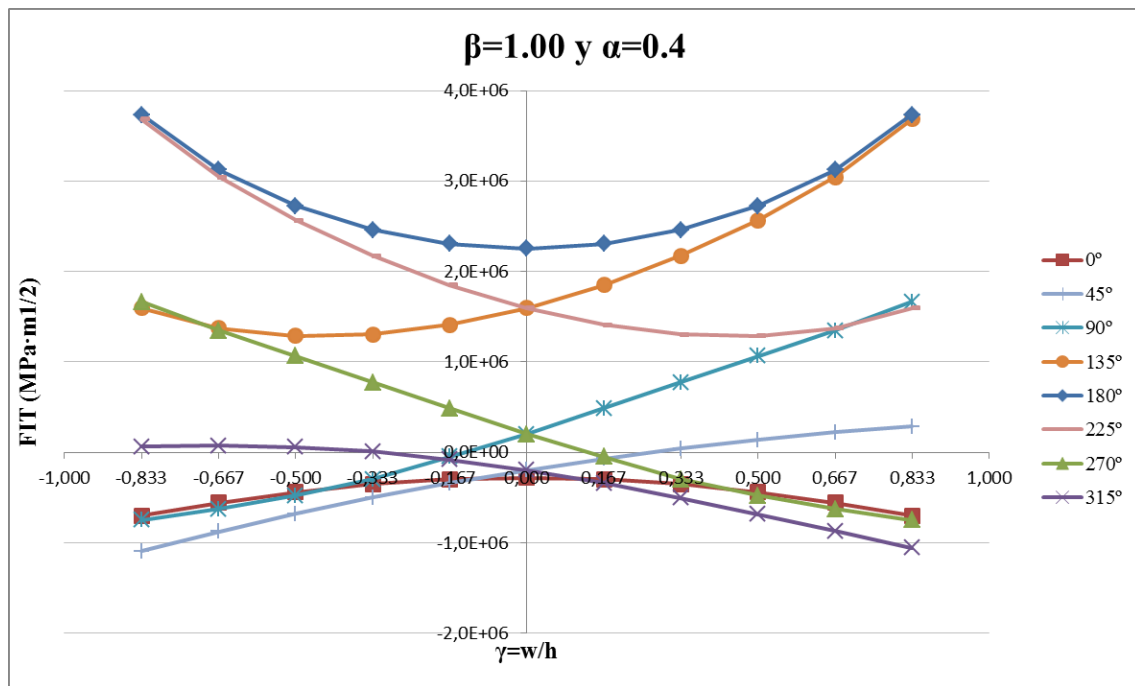


Fig. 5.41. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.4$ a lo largo de un giro completo.

El aumento de profundidad sigue teniendo las mismas consecuencias que para los casos anteriores.

• **Fisura con factor de forma $\beta=1.00$ y profundidad $\alpha=0.5$:**

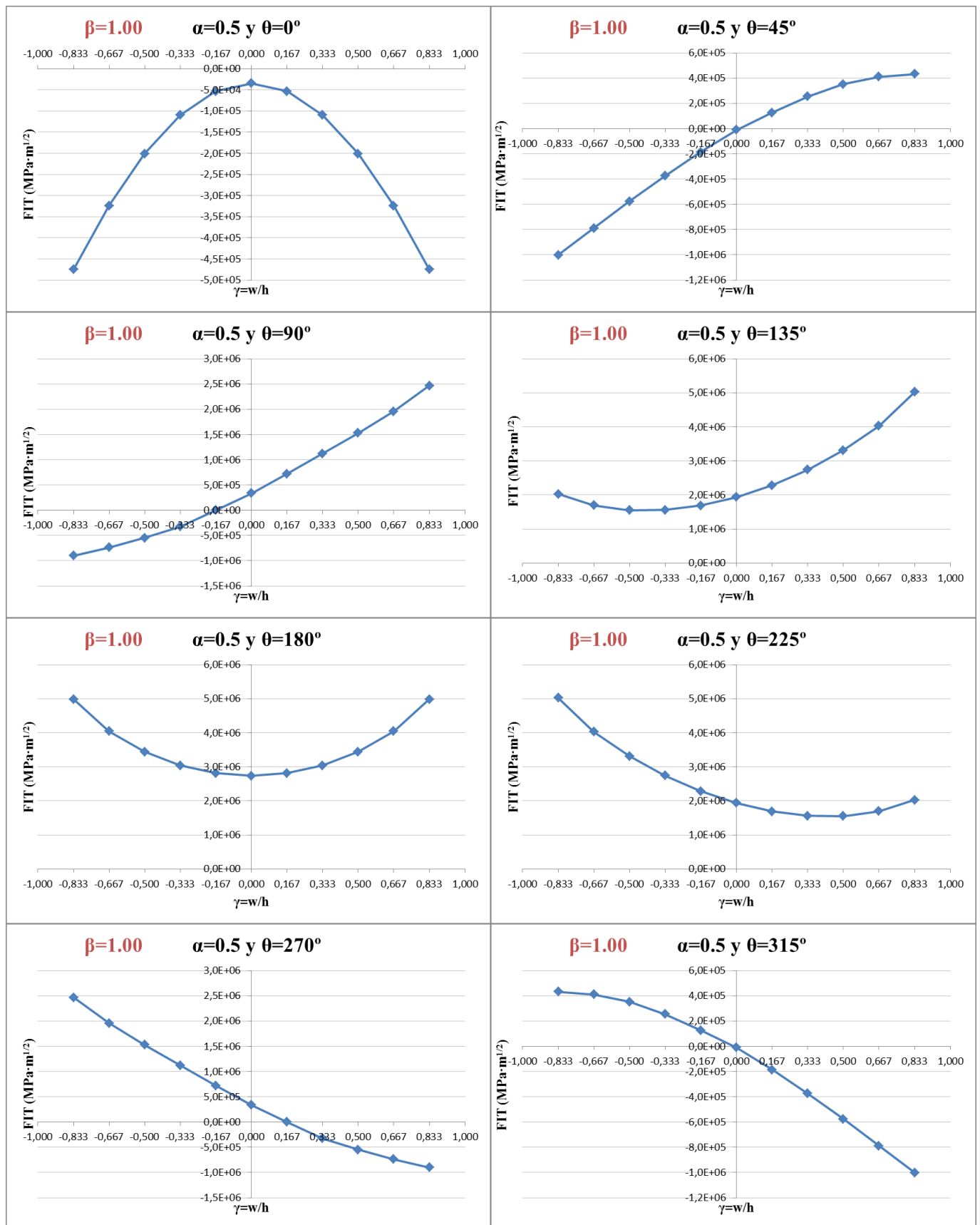


Fig. 5.42. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.5$ para las ocho posiciones angulares.

Dado que la máxima profundidad de este estudio es la correspondiente a $\alpha=0.5$ a continuación se expone la comparación de los cuatro factores de forma para dicha profundidad (Fig. 5.43):

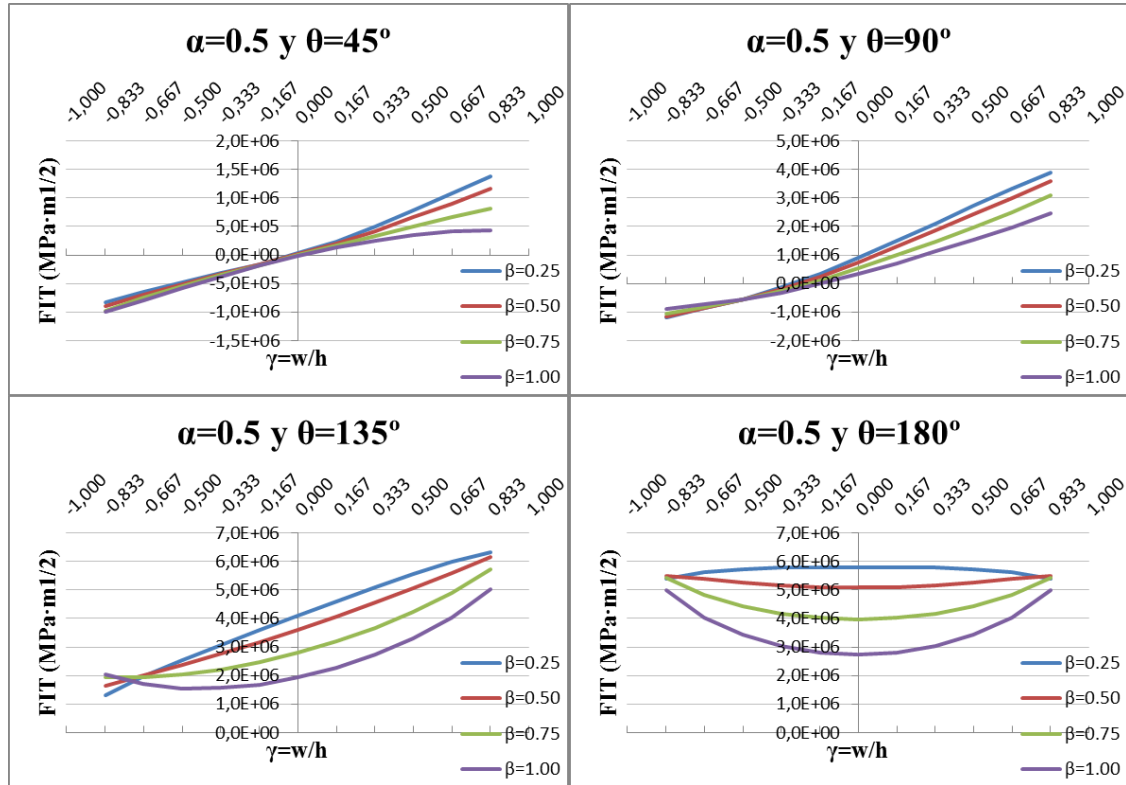


Fig. 5.43. Comparación del FIT de $\beta=0.25$, $\beta=0.5$, $\beta=0.75$ y $\beta=1$ para $\alpha=0.5$ en el proceso de apertura.

Como se venía intuyendo la disminución de la apertura por el aumento del factor de forma β , en una misma posición angular, se ve potenciada por el aumento de la profundidad. Esto se puede ver claramente en la figura 5.43 para la posición angular de 90° .

Para el factor de forma $\beta=1$, solo en la última profundidad $\alpha=0.5$, los valores del FIT en los extremos de la posición angular de 180° son superados por los de la posiciones de 135° y 225° (Fig. 5.44).

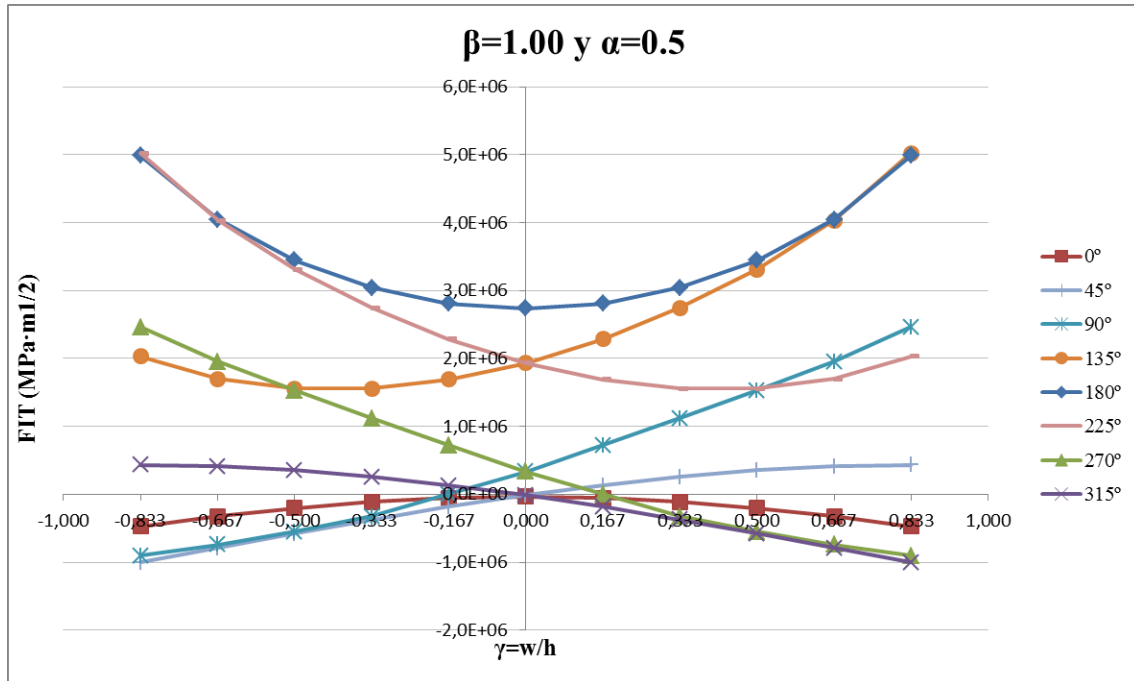


Fig. 5.44. FIT para $\beta=1.00$ y $\alpha=0.5$ a lo largo de un giro completo.

5.2.- PROPAGACIÓN DE LA FISURA EN FUNCIÓN DEL FIT

Dado que en este estudio contempla numerosos casos y geometrías de fisura diferentes, de los resultados del FIT obtenidos se pueden extraer conclusiones para predecir la manera en la que se propagan estas fisuras. Para elaborar dicha predicción este estudio únicamente se basa en la comparación de las curvas del FIT obtenidas para cada fisura. En una fisura, los puntos donde comenzará a propagarse antes, son aquellos cuyos valores del FIT son más altos.

La posición angular correspondiente a $\theta=180^\circ$, en la que la fisura se encuentra completamente abierta, es la posición más crítica para el eje. Es cierto que en los puntos próximos al extremo de la fisura, los valores del FIT son ligeramente superiores en otras posiciones angulares, sin embargo, en general a lo largo de toda la fisura, el FIT medio es mayor para $\theta=180^\circ$ en cualquier fisura.

A continuación se muestran todas las curvas del FIT correspondientes a la posición angular de $\theta=180^\circ$ para los cuatro factores de forma β y las cinco longitudes características α (Figs. 5.45 a 5.48).

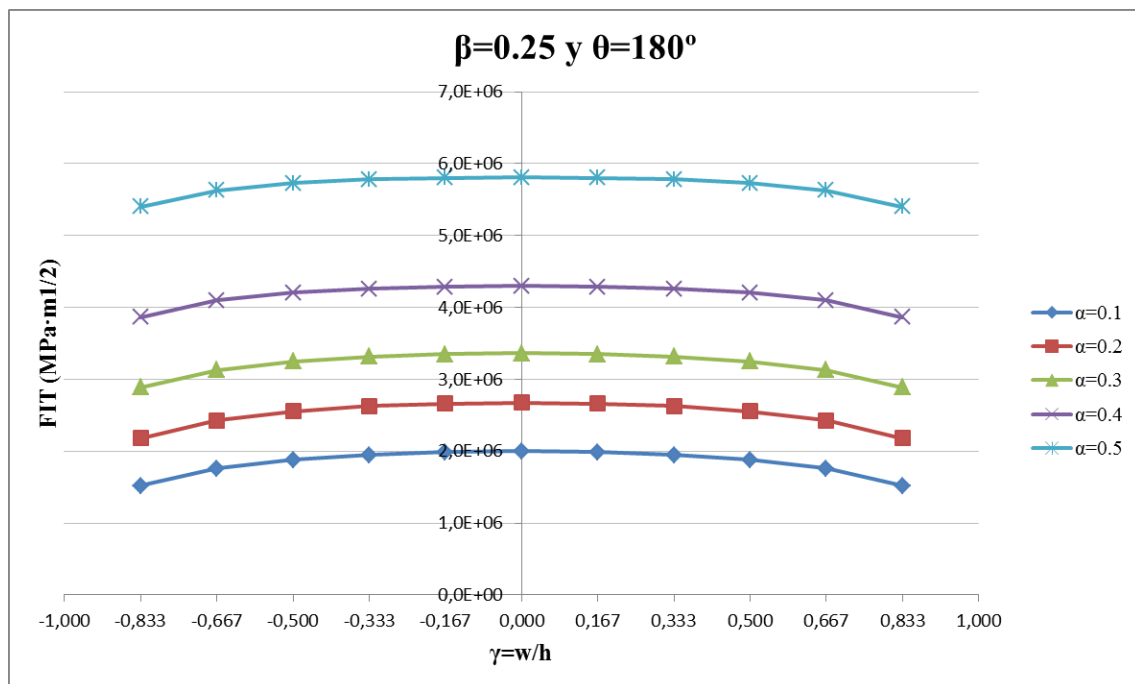


Fig. 5.45. FIT para $\beta=0.25$ y $\theta=180^\circ$ para las cinco profundidades α .

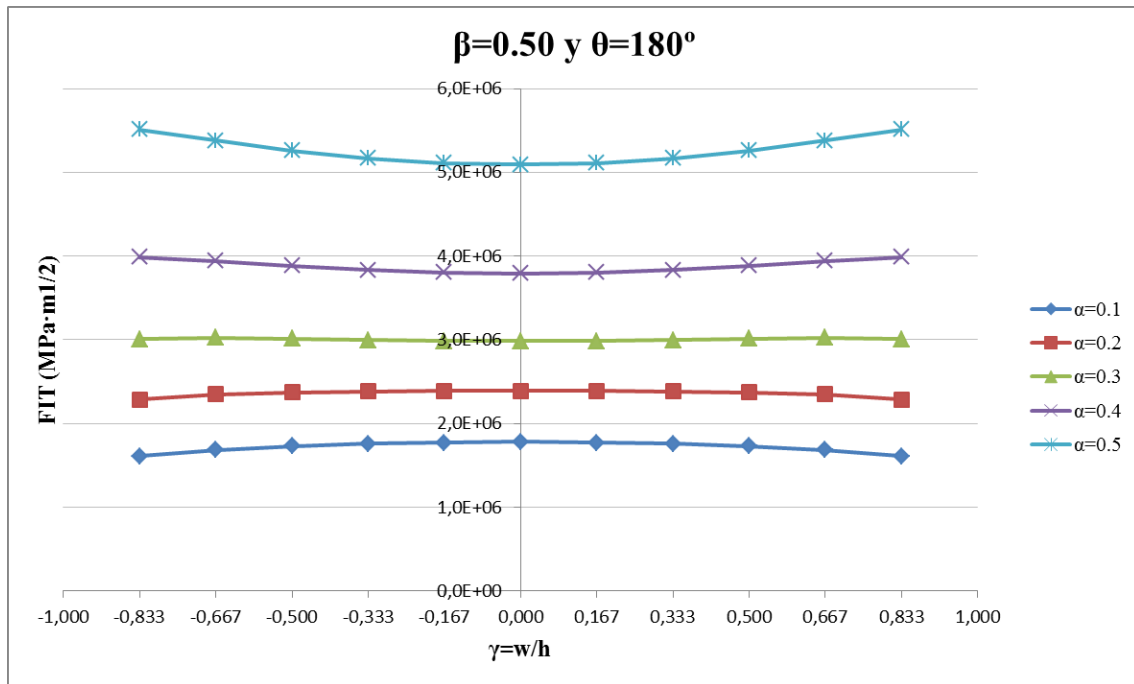


Fig. 5.46. FIT para $\beta=0.50$ y $\theta=180^\circ$ para las cinco profundidades α .

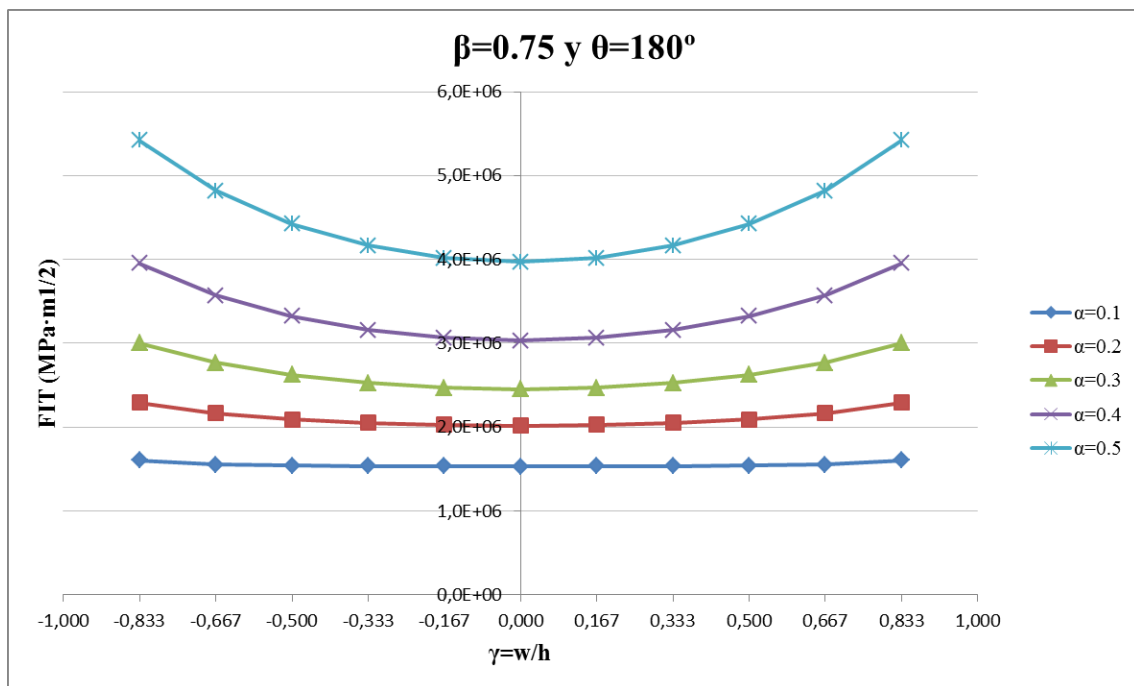


Fig. 5.47. FIT para $\beta=0.75$ y $\theta=180^\circ$ para las cinco profundidades α .

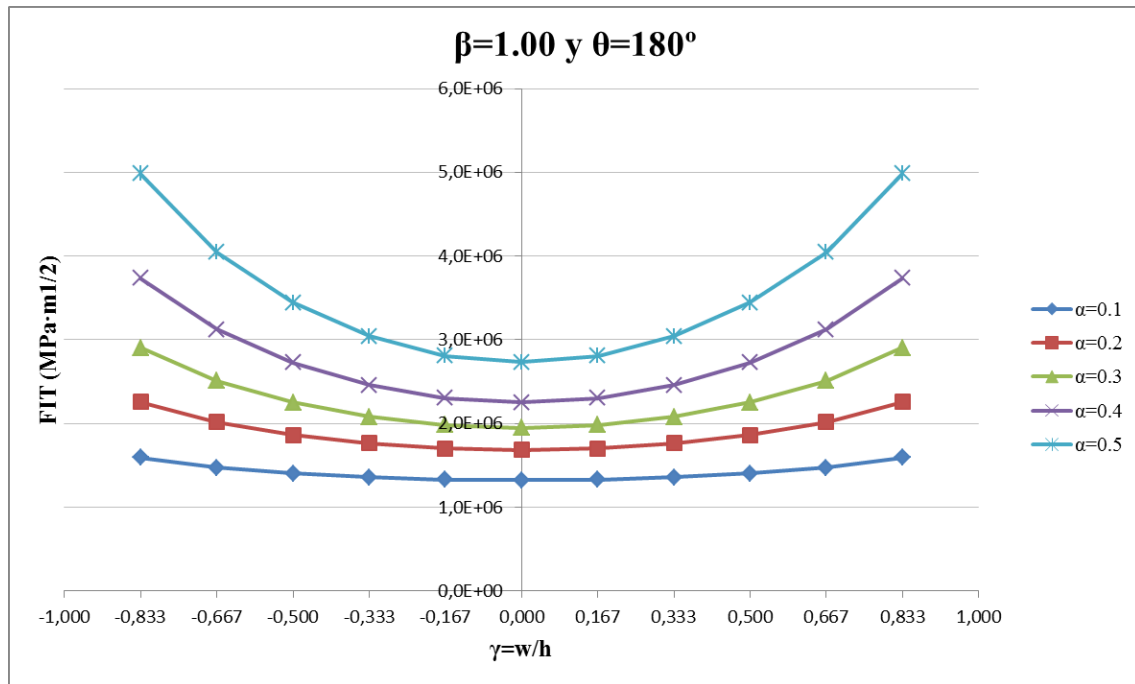


Fig. 5.48. FIT para $\beta=1.00$ y $\theta=180^\circ$ para las cinco profundidades α .

Observando las curvas anteriores, según la convexidad o concavidad de las mismas, se propagará de una forma o de otra. Empezando por el factor de forma $\beta=0.25$ (Fig. 5.45), la geometría menos curvada de todas las que se estudian, se ve que las curvas del FIT para las diferentes profundidades son todas cóncavas, lo que quiere decir que los valores del FIT son más altos en la parte central de la fisura. Esto quiere decir que la fisura se extenderá antes por la parte central que por los extremos, de tal manera que tenderá a curvarse aún más, es decir, aumentará su factor de forma β .

Para $\beta=0.50$ (Fig. 5.46) en las profundidades $\alpha=0.1$ y $\alpha=0.2$ las curvas del FIT también son cóncavas. Para $\alpha=0.3$ el FIT es casi constante, por lo que la fisura se seguirá propagando en todos los puntos del frente prácticamente por igual. Es a partir de $\alpha=0.3$ en adelante donde todas las curvas del FIT tienen forma convexa, es decir, los extremos de la fisura adquieren valores del FIT superiores a la parte central.

Para los factores de forma $\beta=0.75$ y $\beta=1.00$ (Fig. 5.47 y 5.48) todas las curvas del FIT son de nuevo convexas. Esto quiere decir tenderá a propagarse más por los extremos que por la zona central del frente de fisura, reduciendo así su curvatura (disminuyendo el factor de forma β).

Por lo tanto según la muestra de casos de $\theta=180^\circ$, las fisuras tienden a tener un factor de forma alrededor de $\beta=0.50$.

Dado que esta predicción solo se basa en las curvas del FIT para la posición de $\theta=180^\circ$, resulta bastante acertada si se tratase del caso de un eje estático sometido a carga. En el caso de un eje giratorio el comportamiento de la fisura difiere considerablemente de la esta predicción. Un eje que gira a velocidad angular constante dedica la misma cantidad de tiempo a cada una de las ocho posiciones angulares estudiadas, por lo que habrá que tenerlas en cuenta de la misma forma.

Como se ha dicho con anterioridad en los puntos del frente de fisura donde los valores del FIT son negativos se consideran nulos, de modo que no sufren propagación en ese instante.

A priori se podría decir que el giro del eje hace que los puntos próximos a los extremos de la fisura sufran más que los de la zona central, ya que la fisura cuando empieza abrirse por un extremo, este ya toma valores positivos del FIT, y en la parte central aún son negativos. Y de la misma manera ocurre durante en proceso de cierre con el otro extremo.

Si se analizan los valores máximos del FIT en cada punto del frente de fisura para un giro completo se observa que a pesar del efecto del giro, en la fisura con factor de forma $\beta=0.25$ (el más pequeño del estudio) y profundidad $\alpha=0.1$ (la más pequeña), persiste la tendencia a propagarse más por el centro que por los extremos como en la primera predicción. Para un mismo $\beta=0.25$ y aumentando la profundidad a $\alpha=0.2$ aún se marca la misma tendencia pero a partir de $\alpha=0.3$ los extremos de la fisura ya sufren valores más altos del FIT que en la zona central por lo que se propagará más por los extremos reduciendo la curvatura. De la misma manera ocurre para las profundidades mayores $\alpha=0.4$ y $\alpha=0.5$.

Para un factor de forma $\beta=0.50$ y una profundidad de $\alpha=0.1$ los valores máximos del FIT para cada punto del frente de fisura en un giro completo determinan que la fisura se propagará más rápido por el centro que por los extremos, aumentando la curvatura otra vez más. Al aumentar la profundidad a $\alpha=0.2$ el efecto del giro del eje hace que los valores del FIT en los extremos de la fisura se vayan aproximando a los del centro. Es a partir de $\alpha=0.3$ y para mayores profundidades cuando, los valores del FIT en los extremos superan claramente a los del centro de la fisura, reduciendo así, la curvatura de la fisura.

En el caso de las fisuras con factor de forma $\beta=0.75$ y $\beta=1.00$ se propagarán más rápido por los extremos que por el centro para cualquier profundidad. Cuanto mayor sea α más se verá potenciado este comportamiento.

Al igual que en la primera predicción donde se analizaban solamente los casos para una posición angular de $\theta=180^\circ$, se observa que las fisuras siguen tendiendo a tomar un factor de forma alrededor de $\beta=0.50$.

5.3.- CONCLUSIONES

Con la simulación tridimensional hecha con el programa de elementos finitos ABAQUS se ha obtenido el factor de intensidad de tensiones, FIT, a lo largo de las veinte geometrías diferentes (cuatro factores de forma, β , y cinco profundidades, α) de frentes de fisura, en ocho posiciones angulares durante un giro completo. Las conclusiones generales a las que se ha llegado en este proyecto son las siguientes:

- El aumento de la profundidad, α , cuando la fisura se encuentra en estado abierto, hace que aumenten los valores del FIT en cualquier punto del frente de fisura.
- El aumento del factor de forma, β , que se traduce en un aumento de la curvatura del frente de fisura, hace que los valores del FIT decrezcan a lo largo del frente, aunque en mayor medida, en los puntos próximos al centro de la fisura.
- En una fisura los puntos donde comenzará a propagarse antes son aquellos cuyos valores del FIT son más altos. La posición más crítica para el eje es la de $\theta=180^\circ$ (fisura completamente abierta). Es donde, en general, se alcanzan los valores más altos del FIT.
- Los valores del FIT en los puntos próximos a los extremos del frente de fisura se irán incrementando en las posiciones angulares de $\theta=135^\circ$ (extremo derecho) y $\theta=225^\circ$ (extremo izquierdo) a medida que vaya aumentando la profundidad α , pudiendo llegar a ser máximos absolutos del caso estudiado.

- Las curvas del FIT en la posición angular de $\theta=180^\circ$ comenzarán siendo cóncavas, es decir, el centro de la fisura alcanzará valores más altos del FIT y se propagará más por esta zona que por los extremos aumentando su curvatura y por tanto el factor de forma β . A medida que aumentamos el factor de forma de la fisura (β) y su profundidad relativa (α) las curvas se volverán convexas. Esto ocurre al alcanzar un factor de forma $\beta=0.50$ y una profundidad mínima de $\alpha=0.3$. Es a partir de estos valores cuando la fisura tiende a propagarse más por los extremos que por el centro, reduciendo su curvatura y por tanto el factor de forma β .
- Por todo lo anterior se concluye que las fisuras transversales semielípticas en ejes tienden a tener una geometría con un factor de forma alrededor de $\beta=0.50$.

5.4.- TRABAJOS FUTUROS

Como posibles trabajos futuros se podrían simular mediante ABAQUS casos intermedios, es decir, usando el mismo modelo de eje y estableciendo más posiciones angulares θ entre 0° y 360° para obtener un modelo de apertura y cierre de fisura semielíptica aún más aproximado. De la misma manera variando los parámetros α y β se obtendría una predicción sobre la propagación de las fisuras en ejes más detallada.

BIBLIOGRAFÍA

- ABAQUS Inc. (2004): *ABAQUS/CAE User's Manual (version 6.5)*, United States of America.
- Barsom, J. M. y Rolfe, S. T. (1987): *Fracture and Fatigue Control in Structures: Applications of Fracture Mechanics*, Prentice Hall College Div, New Jersey.
- Darpe, A.K., Gupta, K. y Chawla, A. (2004): "Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor", *Journal of Sound and Vibration*.
- Griffith, A. A. (1920): "The phenomena of rupture and flaw in solids", *Philosophical Transactions, Series A*, Vol. 221.
- Irwin, G. R. (1957): "Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate", *Journal of Applied Mechanics*.
- Irwin, G. R. (1960): "Plastic Zone Near a Crack and Fracture Toughness", *Sagamore Ordnance Materials Conference*, Syracuse University.
- Irwin, G. R. (1968): "Linear Fracture Mechanics, Fracture Transition and Fracture Control", *Engineering Fracture Mechanics*.
- Martín, A. y Martínez, J. M. (1999): *Mecánica de la fractura*. Tecnun, Universidad de Navarra.
- Paris, C. P. y Sih, G. C. (1965): "Stress Analysis of Cracks in Fracture Toughness Testing and Its Application", *American Society for Testing and Materials*, Philadelphia.



- Sih, G. C. (1973): *Handbook of Stress-Intensity Factors for Researches and Engineers*, Institute of Fracture and Solids Mechanics, Lehigh University, Bethlehem.
- Tada, H., Paris, C. P. y Irwin, G. R. (1973): *Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corporation, Hellertown.
- Westergaard, H. M. (1939): "Bearing Pressures and Cracks", *Journal of Applied Mechanics*.